

分类号 .....

密 级 .....

U D C .....

编 号 10486 .....

武汉大学

硕 士 学 位 论 文

GNSS/INS 组合导航系统中杆臂影响  
的定量分析

研 究 生 姓 名： 郭忠平

学 号： 2013206180019

指导教师姓名、职称： 牛小骥 教授

专 业 名 称： 大地测量学与测量工程

研 究 方 向： GNSS/INS 组合导航

二零一六年五月

# **Quantitative Analysis of the Effect of Leverarm on GNSS/INS Integrated Solutions**

By

**Zhongping Guo**

**Supervised by Prof. Xiaoji Niu**



**Wuhan University**

**Wuhan, 430079, P. R. China**

**April, 2016**

## 论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者（签名）：

年 月 日

## 摘要

由于 GNSS/INS 组合导航系统的优越性,使得其在军事和民用中都有着巨大的应用价值。GNSS/INS 组合导航的误差源主要有三类:与 IMU 器件相关的误差,比如陀螺和加速度计零偏,比例因子,交轴耦合误差和测量噪声;辅助信息测量误差,主要是 GNSS 位置和速度误差;组合类误差,主要是与组合导航相关的误差,包括杆臂误差,时间同步误差和安装误差等。本文通过仿真 GNSS 数据和 IMU 原始数据,针对组合导航的杆臂误差影响,考察了不同量级的杆臂误差对组合导航系统的影响大小。

论文首先阐述了 GNSS/INS 组合导航的基本特点,杆臂误差对 GNSS/INS 组合导航影响的国内外研究的现状。

其次阐述了惯性导航技术原理和算法,包括常用坐标系及其转换关系,IMU 误差,INS 机械编排和 INS 误差方程,进而介绍了利用卡尔曼滤波和最优平滑算法的 GNSS/INS 组合导航算法。

最后论文介绍了 GNSS/INS 组合导航杆臂影响的定量分析方法,针对 GNSS/INS 组合导航中,存在杆臂效应的影响,通过仿真 GNSS 定位结果和 IMU 原始数据,定量分析杆臂测量误差对组合导航结果的位置、速度和姿态的精度影响。通过仿真实验及数据分析表明,杆臂误差不但影响组合导航的定位精度,而且影响组合导航的速度和姿态。仿真结果表明,伪距单点定位的组合导航系统要求优于 1m 的杆臂精度,而 RTK 需要厘米级的杆臂精度,对 GNSS/INS 组合导航算法和应用具有积极的指导意义和应用价值。

**关键词:** GNSS/INS 组合导航; 杆臂; 卡尔曼滤波; 仿真;

## Abstract

Because of superiority of GNSS/INS integrated navigation system, it has great application value both in the military and civilian field. The main error sources of GNSS/INS integrate navigation include three aspects: errors related with IMU device, such as bias error、scale factor error、axis-misalignment/cross-axis and noise error; auxiliary information measurement error, mainly including position and velocity error; combined error, mainly related with integrated navigation, including leverarm error、time synchronization error and alignment error. In this paper we mainly focused on the effect of leverarm of GNSS/INS integrated navigation, and has carried out some research work.

First, this paper introduced the basic characteristics of GNSS/INS integrated navigation and current situation of domestic and foreign research of the effect of leverarm error to GNSS/INS integrated navigation.

Second, the paper introduced the principle and algorithm of inertial navigation technology, including common coordinate systems and its transformation relation、IMU error、INS machinery arrange and the error equation of INS. Then it introduced the algorithm of GNSS/INS integrated navigation which used kalman filter and optimal smoothing algorithm.

Last, the paper introduced the method of quantitative analysis of the effect of leverarm on GNSS/INS integrated solutions. For the effect of leverarm on GNSS/INS integrated navigation, by simulation the result of GNSS positioning and IMU raw data, we analysis the effect of leverarm on position、velocity and attitude of integrated navigation result. By the simulation and data anlysisist ,it shows that leverarm error not only effects positioning accuracy of integration navigation,but also effects velocity and attitude of integration navigation.Simulation results shows that the integration navigation of SPP needs the leverarm precise more than 1 meter and integration navigation of RTK needs the leverarm precise more than centimeter. It has positive guiding significance and application value on the algorithm of GNSS/INS integrated navigation.

**Keywords:** GNSS/INS integrated navigation; leverarm; Kalman filter; simulation;

## 目 录

摘要.....	I
Abstract.....	II
<b>第 1 章 绪论.....</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 论文主要内容.....	3
1.4 研究的难点及创新点.....	4
<b>第 2 章 组合导航基本原理 .....</b>	<b>5</b>
2.1 引言.....	5
2.2 惯性导航技术.....	5
2.2.1 常用坐标系及其转换关系 .....	5
2.2.2 IMU 及其误差 .....	9
2.2.3 INS 机械编排.....	11
2.2.4 INS 误差方程.....	14
2.3 GNSS/INS 组合导航.....	16
2.3.1 卡尔曼滤波 .....	17
2.3.2 最优平滑算法 .....	18
2.3.3 常见随机过程 .....	20
2.3.4 GNSS/INS 组合导航算法 .....	22
2.4 本章小结.....	25
<b>第 3 章 杆臂误差影响的定量分析方法 .....</b>	<b>27</b>
3.1 引言.....	27
3.2 导航误差定量分析方法.....	27
3.2.1 导航误差分析方法 .....	27
3.2.2 GNSS/INS 组合导航仿真器 .....	28
3.3 仿真条件设置.....	31
3.3.1 仿真轨迹 .....	31
3.3.2 预设条件 .....	33
3.4 本章小结.....	38
<b>第 4 章 实验及数据分析 .....</b>	<b>40</b>
4.1 引言.....	40
4.2 数据处理方案.....	40

4.2.1	GNSS/INS 组合导航数据处理软件 .....	40
4.2.2	导航误差分析 .....	43
4.3	数据分析 .....	43
4.3.1	RTK + SPAN-FSAS .....	44
4.3.2	SPP + SPAN-FSAS .....	47
4.3.3	RTK + MTi-G .....	48
4.3.4	SPP + MTi-G .....	52
4.3.5	RTK + POS830 .....	47
4.3.6	SPP + POS830 .....	53
4.4	结果分析 .....	55
4.5	本章小结 .....	55
<b>第 5 章</b>	<b>总结与展望 .....</b>	<b>56</b>
5.1	总结 .....	56
5.2	展望 .....	57
参考文献	.....	58
致谢	.....	61

# 第 1 章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

GNSS/INS 组合导航结合两者的特性有很强的互补性，既能很好的抑制了两者的缺点，又可以最大限度地发挥两者的优势，受到海、陆、空各种运载系统应用的青睐，在军事和民用两方面都获得了广泛的推广。以民用领域中的车载移动测绘为代表，GNSS/INS 组合导航模式以其持续导航、精度可靠和高自主性，正日益成为导航与大地测量相关领域和行业中的理想组合方式。GNSS/INS 组合导航设备经过近年的飞速发展，已经成型并大量投入使用，同时与其他传感器如 CCD 相机、激光扫描仪等的组合也已大范围见诸测图、地理信息获取、移动测绘、市政工程、交通等领域。在与其他传感器的组合使用的过程中，GNSS/INS 组合导航主要起着提供位置基准、姿态的作用，是相机、激光扫描仪等数据处理的基础。因此，GNSS/INS 组合导航的精度对地理信息、测绘等产品的质量会产生直接影响。

GNSS/INS 组合导航的误差来源可以分为以下三类：1) 与 INS 相关的误差源，主要是各类惯性传感器误差，包括如陀螺和加速度计的零偏、比例因子、交轴耦合误差和测量噪声等。2) 辅助信息测量误差，主要是 GNSS 位置和速度误差。3) 组合类误差，主要是与组合导航相关的误差，包括杆臂误差，时间同步误差和安装误差等。

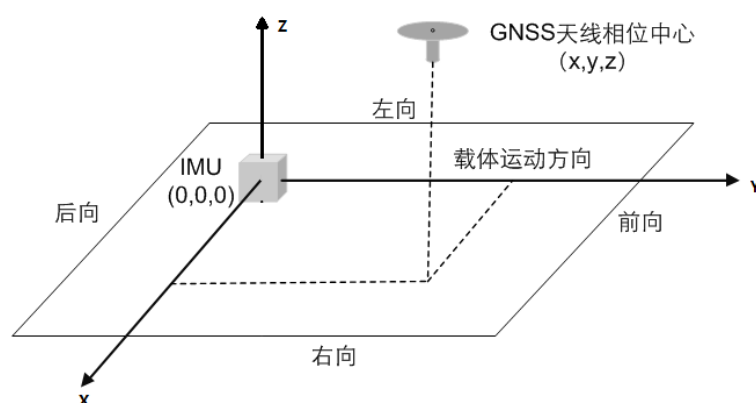


图 1-1 GNSS 天线杆臂示意图

由于 IMU 和 GNSS 天线两个硬件无法安装在同一个点上，即 IMU 测量中心与 GNSS 天线相位中心在空间上无法重合，因此二者之间存在一个杆臂。对于采用 INS/GNSS 组合导航的系统，GNSS 能够提供较高精度的测量信息，差分 GNSS 提供



的位置精度可达厘米量级，如果杆臂误差大于测量信息的精度水平，则测量信息会被严重削弱。杆臂误差对组合导航输出的位置、速度和姿态都有影响，是一个重要的误差源。

GNSS/INS 组合导航的三类误差源中 INS 相关误差源和辅助信息量测误差对 GNSS/INS 组合导航的影响，这方面的研究已经相对成熟。然而对于杆臂误差，一般的组合导航应用会给出如下的定性描述：GNSS 天线杆臂必须精确测量和标定，杆臂测量误差会导致同等量级的组合导航位置误差，如厘米级的杆臂误差会导致厘米级的 GNSS/INS 组合导航误差。这类描述对于精密地 GNSS/INS 组合导航应用来说显然是不够的，因此本文专门针对这一问题进行研究和讨论。

本文将针对 GNSS/INS 组合导航系统中的杆臂误差对最终的组合导航结果的影响，进行定量分析，为 GNSS/INS 组合导航算法设计和应用提供定量的参考，具有重要的应用参考价值。

## 1.2 国内外研究现状

惯性导航系统 (INS) 属于航位推算系统，其测量值误差逐步累积传播，从而导致系统导航解算的总误差随时间发散。INS 导航系统的误差源主要来自三个方面：初始化（即初始对准）误差；惯性传感器误差；INS 导航算法误差，包括算法近似处理和有限计算频率（时间离散化）导致的计算误差<sup>[1, 2]</sup>。

GNSS 定位精度主要受 GNSS 卫星几何分布、GNSS 误差源以及 GNSS 定位模式等影响，相关研究成果已经较为丰富且成熟<sup>[2-4]</sup>。GNSS 可视卫星空间几何分布是随时间变化的，它是获得高精度定位结果的重要因素，瞬时卫星几何分布对导航解算精度的影响常用精度因子 (Dilution of Precision, DOP) 进行评定<sup>[5]</sup>。DOP 值是一个与卫星星座相关的函数，也是时间的函数，其变化相对缓慢，主要影响 GNSS 绝对定位精度。

GNSS/INS 组合导航系统的架构根据组合方式分为松组合、紧组合和深组合<sup>[6, 7]</sup>。以松组合为例，组合导航的最终精度主要受 GNSS 定位精度、INS 导航解算精度和组合导航最优估计算法等方面影响。其中，最优估计算法的设计不足（如状态选择和误差建模不合理等）会造成非线性和可观测性等问题，从而影响组合导航解算结果的最优<sup>[8-11]</sup>。另外，最优估计中的配置参数的准确性（如系统噪声和观测噪声强度等）决定了 GNSS 辅助信息和 INS 预测信息的权重分配情况，它会直接影响 GNSS/INS 组合导航精度<sup>[12-14]</sup>。<sup>[15, 16]</sup>分别尝试采用自适应和强化学习等方式进行 Kalman 滤波器参数调整工作以减小配置参数精度的影响，从而改善组合导航绝对精度，但是他们并没有对参数调整对导航精度的影响做深入分析。

由于 GNSS/INS 组合导航同时具有了 GNSS 较好的长期精度和 INS 较好的短期精度的优势，因此 GNSS/INS 组合导航系统性能分析可以综合采用 GNSS 和 INS 精度评定方法。Kennedy 在分析 GNSS/INS 组合导航产品性能时用一套高精度 GNSS/INS 组合系统为被测系统提供“参考真值”以计算导航误差，采用传统的数理统计方法对获取的导航误差时间序列进行整体绝对精度的评定<sup>[17, 18]</sup>。Reid 结合 GNSS/INS 组合导航产品在移动测图中提供直接地理参考的具体作用，将已知地面控制点作为参考值，同样采用传统数理统计方法对导航误差的绝对精度进行评定<sup>[19]</sup>。GNSS 信号中断下 INS 位置漂移误差的统计值通常也被作为 GNSS/INS 组合导航系统性能的评价方法<sup>[20, 21]</sup>。以上均是对 GNSS/INS 组合导航系统整体精度的评定。Applanix 公司将陀螺噪声和残余陀螺漂移作为评定其 POS 系统相对精度的辅助指标，但是并没有正面对相对精度给出阐述。Škaloud (1999, 2002) 通过仿真方法给出了在无 GPS 辅助和不同时间间隔 GPS 辅助下（如 2 秒、50 秒等）的 GNSS/INS 组合导航姿态精度水平，但是他只是考察了陀螺漂移误差受组合导航估计的影响以及由陀螺漂移引起的姿态漂移误差水平。

国内外已有学者对杆臂效应做了一定的研究。前人对于 GNSS/INS 组合导航精度影响因素的分析主要集中在由定位误差、惯导时间漂移带来的导航精度偏差。目前，关于杆臂效应的产生机制及杆臂效应的补偿方法国内外也已经有大量的研究，并取得了一定的成果。Jaewon Seo 等学者提出一种车载组合导航的杆臂在线补偿的方法。刘锡祥、徐晓苏设计和仿真了大杆臂条件下的传递对准算法。何秀凤等研究了组合导航系统中杆臂效应引起的干扰比力问题，分析表明杆臂效应引起的干扰比力是主要的误差源之一，并且由于干扰比力的导航误差随时间快速积累。

### 1.3 论文主要内容

本文针对 GNSS/INS 组合导航系统中的杆臂误差对组合导航结果的影响进行细致的定量分析和研究。本文的研究内容及结构安排如下：

第一章，阐述论文选题背景及意义，指出 GNSS/INS 组合导航在测绘领域的重要作用，阐述 GNSS/INS 组合导航系统中杆臂影响的定量分析研究的重要意义，提出本文的研究目标，并介绍国内外的相关研究进展。

第二章，介绍 GNSS/INS 组合导航基本原理。首先介绍惯性导航的基本原理，包括传感器误差及机械编排算法和误差方程；然后介绍 GNSS/INS 组合导航算法，包括卡尔曼滤波在组合导航中的应用和滤波设计、方向平滑算法设计和各类误差的随机过程建模方法和理论。

第三章，介绍 GNSS/INS 组合导航系统中杆臂误差影响的定量分析方法，包括如

何评估误差的方法、介绍 GNSS/INS 组合导航仿真器以及如何利用 GNSS/INS 组合导航仿真器进行数据仿真，接着介绍仿真数据的预设条件。

第四章，针对第三章的方法进行数据处理和分析，针对不同等级的惯导，不同的杆臂误差进行误差的定量分析和统计，最终给出定量分析结果；

第五章，总结本文的工作，指出工作的成果和不足，提出后续研究的方向。

## 1.4 研究的难点及创新点

本文的主要内容及创新点是：针对 GNSS/INS 组合导航中，存在杆臂效应的影响，通过仿真 GNSS 定位结果和 IMU 原始数据，定量分析杆臂测量误差对组合导航结果的位置、速度和姿态的精度影响。对 GNSS/INS 组合导航算法和应用具有积极的指导意义和应用价值。

## 第 2 章 组合导航基本原理

### 2.1 引言

如前所述，GNSS/INS 组合导航系统可以弥补 GNSS 和 INS 独立工作时的诸多不足，为用户提供高精度、高可靠性且丰富的导航信息。GNSS/INS 组合导航技术从上世纪 80 年代初开始引起人们的重视，已经成为一项覆盖了从军用到民用，从高端到低端的通用技术，目前正得到空前发展。本章将对 GNSS/INS 组合导航技术进行介绍，为 GNSS/INS 组合导航系统中杆臂影响的定量分析提供理论支持。

本章将首先介绍惯性导航技术的基础知识，包括常用坐标系及其转换关系、IMU 及其误差、INS 机械编排和 INS 误差方程。其次，本章将介绍 GNSS/INS 组合导航技术，主要包括 Kalman 滤波基础知识、最优平滑算法、常见的几种随机过程和 GNSS/INS 组合导航算法设计。

### 2.2 惯性导航技术

惯性导航（Inertial Navigation）是 20 世纪中期发展起来的完全自主式导航技术，其理论基础为牛顿第二运动定律。它利用惯性测量元件测量载体相对于惯性空间的运动参数（即角速度和加速度），进而推算出载体相对初始点的位置、速度和姿态。惯性导航系统分为平台式系统和捷联式系统，捷联式系统去除了平台式系统复杂的机械结构，可直接安装在载体上，具有成本低、体积小和可靠性高等优点。但是，捷联惯性导航算法计算复杂度也显著增加。随着计算机技术的不断发展和传感器技术的进步，捷联技术已经成为现实并迅速发展<sup>[22]</sup>。捷联式惯性导航系统具有完全自主、不受外界干扰、输出信息量大、输出信息实时性强等优点，使其在军用和民用等相关领域得到了广泛应用<sup>[23, 24]</sup>。本节将针对捷联式惯性导航系统，重点介绍惯性导航基础知识和 INS 机械编排及其误差方程。

#### 2.2.1 常用坐标系及其转换关系

惯性导航理论中涉及各种不同的坐标系，导航计算在不同坐标系中会有不同的表现形式。本小节并不对坐标系进行深入研究，在此只简单介绍几种惯性导航解算中常用坐标系的定义、属性及其相互转换关系。惯性导航涉及的几种坐标系主要包括：惯性坐标系、地球坐标系、导航坐标系、载体坐标系、计算坐标系和平台坐标系。

[22, 25-27]。

惯性坐标系（简称为*i*系）也称惯性参考坐标系，它是指在惯性空间中静止或者匀速直线运动的参考坐标系，一般分为太阳中心惯性坐标系和地心惯性坐标系。其中，地心惯性坐标系常应用于研究地球表面附近运载体的导航定位问题，该坐标系的原点通常取在地球中心，*z*轴方向与地球自转轴的方向一致（假定自转轴方向不变），*x*轴指向平均春分点，*y*轴在赤道平面内垂直于*x*轴和*z*轴构成右手坐标系，如图 2-1 所示  $x^i y^i z^i$  坐标系。

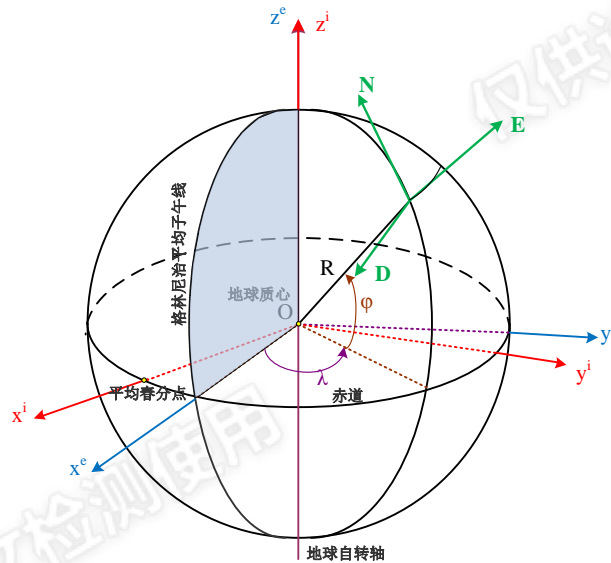


图 2-1 参考坐标系：*i*系、*e*系、*n*系

地球坐标系（简称为*e*系）也称为地心地固坐标系（Earth-Centered, Earth-Fixed, ECEF），它与地球固联，随地球一起转动，其原点在取地球中心，*z*轴沿地球自转轴方向，*x*轴指向格林尼治平均子午线，*y*轴与*x*、*z*轴构成右手坐标系，如图 2-1 所示  $x^e y^e z^e$  坐标系。地心地固坐标系和惯性坐标系的方向余弦矩阵  $C_e^i$  可表示为，

$$C_e^i = \begin{bmatrix} \cos \omega_{ie} t & -\sin \omega_{ie} t & 0 \\ \sin \omega_{ie} t & \cos \omega_{ie} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

其中  $\omega_{ie}$  为地球坐标系相对于惯性坐标系的旋转角速度，通常称为地球自转角速度，*t* 为转动时间。

导航坐标系（简称为*n*系）是用于 INS 导航解算的参考坐标系，一般选取当地地理坐标系作为导航坐标系，此时其原点位于载体所在点，*x*轴指向地理北方向，*z*轴垂直参考椭球面且指向向下，*y*轴与*x*轴和*z*轴构成右手坐标系，如图 2-1 中所示的北-东-地（NED）坐标系。导航坐标系与地心地固坐标系之间的方向余弦矩阵  $C_n^e$  可由纬度  $\phi$  和经度  $\lambda$  表示，其表达形式为，

$$\mathbf{C}_n^e = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

方向余弦矩阵  $\mathbf{C}_n^e$  相应的四元数  $\mathbf{q}_n^e$  表达形式为,

$$\mathbf{q}_n^e = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ -\sin(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \\ \sin(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

载体坐标系(简称为  $b$  系)是一个与横滚角、俯仰角和航向角对应的正交坐标系, 如果以 IMU 作为载体, 则其坐标原点在 IMU 测量中心(一般 IMU 会标注出其测量中心)。其中一种常用的载体坐标系的定义为:  $x$  轴与载体角运动的横滚轴一致, 且指向载体前方为正;  $y$  轴与载体角运动的俯仰轴一致, 且指向载体的右侧为正;  $z$  轴与载体角运动的航向轴一致, 且垂直载体且指向下方, 构成前-右-下(Forward-Right-Down, FRD)坐标系, 如图 2-2 所示。导航坐标系到载体坐标系旋转顺序为: 航向角(Yaw)、俯仰角(Pitch)、横滚角(Roll), 相应的方向余弦矩阵  $\mathbf{C}_n^b$  定义为,

$$\mathbf{C}_n^b = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \quad (2-4)$$

其中,  $\phi$ ,  $\theta$  和  $\psi$  分别为横滚角、俯仰角和航向角。载体坐标系到导航坐标系的方向余弦矩阵  $\mathbf{C}_b^n$  有如下表达式,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^n &= (\mathbf{C}_n^b)^T = \mathbf{R}_z(-\psi) \mathbf{R}_y(-\theta) \mathbf{R}_x(-\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-5)$$

此处  $\sin$  和  $\cos$  分别用  $s$  和  $c$  表示。

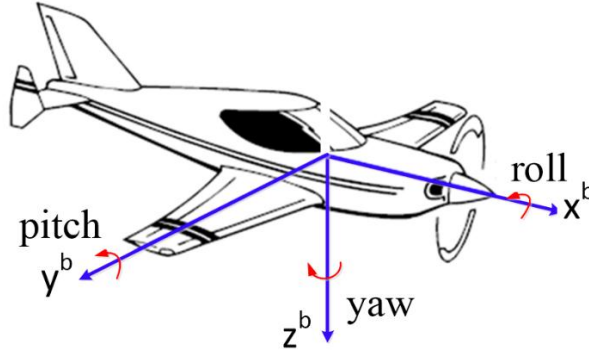


图 2-2 载体坐标系 ( $b$ 系) 示意图

计算坐标系 (简称为  $c$  系) 是由 INS 计算机输出的导航结果 (如经、纬度) 所确定的坐标系。由于 INS 导航解算的经度和纬度存在误差, 因此, 计算坐标系相对于真实导航坐标系存在角度差异, 可由等效旋转矢量  $\delta\theta$  表示, 如图 2-3 示。

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\lambda \cos \varphi \\ -\delta\varphi \\ -\delta\lambda \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta r_E / (R_N + h) \\ -\delta r_N / (R_M + h) \\ -\delta r_E \tan \varphi / (R_N + h) \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

其中,  $\delta\varphi$ 、 $\delta\lambda$  分别是纬度误差和经度误差,  $\delta r_N$ 、 $\delta r_E$  分别为相应的北向位置误差和东向位置误差,  $R_M$ 、 $R_N$  为子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径,  $h$  为高程信息。

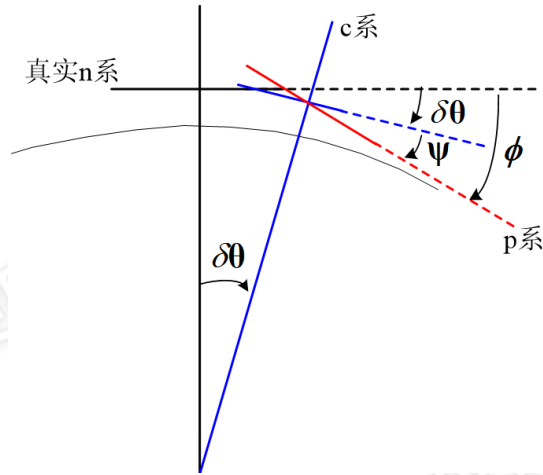
导航坐标系到计算坐标系的方向余弦矩阵  $C_n^c$  可写为:

$$C_n^c = I - (\delta\theta \times) \quad (2-7)$$

$$(\delta\theta \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_z & \delta\theta_y \\ \delta\theta_z & 0 & -\delta\theta_x \\ -\delta\theta_y & \delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

其中,  $\delta\theta$  为等效旋转矢量,  $(\delta\theta \times)$  为  $\delta\theta$  的反对称矩阵形式,  $I$  为单位矩阵。需要注意的是, 由  $c$  系的定义可知, INS 导航解算中通过纬度  $\varphi$  和经度  $\lambda$  计算得到的  $n$  系到  $e$  系的方向余弦矩阵  $\hat{C}_n^e$  与  $c$  系到  $e$  系的方向余弦矩阵  $C_c^e$  是相等的, 即存在如下关系式

$$\hat{C}_n^e = C_c^e \quad (2-9)$$

图 2-3 真实  $n$  系、 $c$  系、 $p$  系之间关系图

平台坐标系（ $p$  系）在捷联式惯性导航系统中是一个数学平台坐标系，是由惯性传感器的敏感轴所确定的坐标系，理想  $p$  系即为导航坐标系。但是，实际的  $p$  系与导航坐标系存在误差。由  $p$  系的定义可知，INS 导航解算中计算的  $b$  系到  $n$  系的方向余弦矩阵  $\hat{C}_b^n$  与  $b$  系到  $p$  系的方向余弦矩阵  $C_b^p$  是相等的，即存在关系式：

$$\hat{C}_b^n = C_b^p = C_n^p C_b^n \quad (2-10)$$

$p$  系与计算坐标系和真实导航坐标系分别存在误差角，其等效旋转矢量分别表示为  $\psi$  和  $\phi$ ，两者存在关系： $\phi = \psi + \delta\theta$ ，如图 2-3 所示。相应的方向余弦矩阵  $C_c^p$  和  $C_n^p$  关系式分别表示为：

$$C_c^p = I - (\psi \times) \quad (2-11)$$

$$C_n^p = I - (\phi \times) \quad (2-12)$$

### 2.2.2 IMU 及其误差

典型惯性测量单元（IMU）主要由以下几个部分构成，包括陀螺仪和加速度计、IMU 处理器、标定参数存储器、温度传感器和相关电源系统<sup>[28]</sup>。其中，IMU 一般包含三个陀螺仪和三个加速度计，分别安装在三个正交的敏感轴上，以实现三维的角速度和比力测量。陀螺仪测量角速度，加速度计测量比力（定义为作用在单位质量上惯性力与万有引力的向量和），角速度和比力均是相对于惯性坐标系的运动参数。IMU 处理器对传感器输出信息进行量纲转换和误差补偿等工作。标定参数存储器中存放有经实验室标定出的 IMU 误差参数（如 IMU 常值误差等）。温度传感器主要是用来保证惯性传感器在一定的温度范围内正常工作。

INS 根据其应用角度不同一般划分为以下四种精度等级（主要是针对民用领域）：导航级、战术级、汽车级、消费级。

陀螺仪和加速度计均包含以下几种主要的误差：零偏、比例因子、交轴耦合和高频随机噪声。其中，零偏是指在没有角速度或加速度输入的情况下传感器的输出。



比例因子是输出信号的变化与被测输入速率的变化之间的比值的误差，其通常表示为输出误差和输入速率的比值，一般为百万分之几，性能较差的传感器可用百分比表示。图 2-4 给出了零偏和比例因子的表现特性。交轴耦合是由传感器敏感轴线的非正交性造成的，导致加速度计和陀螺测量到其他敏感轴的比力分量和角速度分量。高阶误差项、角速度-加速度交叉敏感误差等也可能存在，因传感器种类不同而异，这些深层次的惯性传感器误差在本文中不再赘述，具体内容在较多文献中有详细介绍<sup>[22, 28]</sup>。

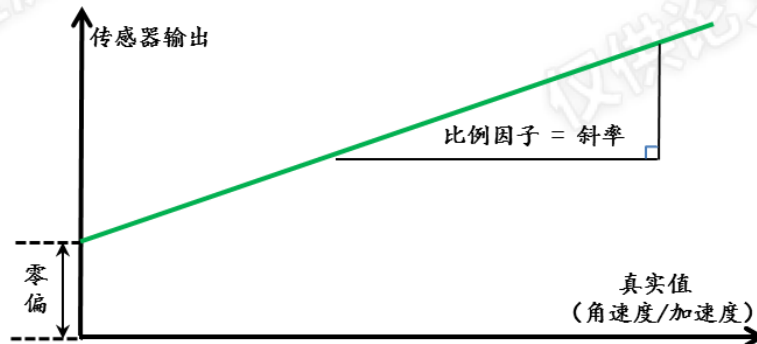


图 2-4 IMU 误差中零偏误差和比例因子误差的表现特性

IMU 的零偏、比例因子和交轴耦合均包含以下几个部分：常值项、随温度变化项、逐次启动变化项和运行期间变化项<sup>[22, 28]</sup>。其中，常值项是传感器每次上电都会出现且可以预见到的；随温度变化项是与温度相关的传感器误差；逐次启动变化项是每次上电都不一样，但在任何单次运行过程中保持不变的随机常数，通常由其统计特性来表征（即重复性，如零偏重复性）；运行期间变化项是在单次上电运行过程中一直变化的随机误差，表现为传感器输出信息的起伏和波动情况，其统计特性通常称为稳定性（如零偏稳定性），不同传感器的运行期间变化项的特性可能不一样。

IMU 误差的常值项可以通过实验室内场标定进行修正。随温度变化项也可以结合内场标定的温度参数很大程度上进行修正，修正后残留误差可归入至逐次项启动变化项误差和运行期间变化项误差。另外，由于逐次启动变化项误差在单次运行过程是不变的，其可以在初始对准和/或组合导航过程中进行估计和补偿。运行期间变化误差也可在组合导航解算时进行误差建模，但是无法完全消除。单次上电工作时 IMU 主要误差为运行期间变化项误差（含标定补偿后的残余误差）和低频随机噪声两种惯性导航参数，此两项误差的统计特性便是 GNSS/INS 组合导航系统中 Kalman 滤波的状态性能参数。

高频随机噪声存在于所有惯性传感器输出信息中，受多种误差源的影响，如激励信号的频率不稳定、外界震动的干扰等。在陀螺和加速度计的噪声谱中，通常将频率低于 1Hz 的分量近似为白噪声（即相关时间远小于采样时间）。惯性传感器的随机噪声通常用“功率谱密度”（Power Spectral Density, PSD）方根的形式来表征。陀螺和加速度计的随机噪声有时也分别描述为角度随机游走（Angular Random Walk,

ARW) 和速度随机游走 (Velocity Random Walk, VRW), 它既不能被标校, 也无法进行补偿。随机噪声的功率谱密度  $q$  乘以采样率  $f$  或者除以采样周期  $T$ , 就得到随机噪声采样的方差  $\sigma^2$ , 其表达式为:

$$\sigma^2 = q \cdot f = \frac{q}{T} \quad (2-13)$$

陀螺仪实际测量模型如下:

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \mathbf{b}_\omega + S_\omega \cdot \omega_{ib}^b + \varepsilon_\omega \quad (2-14)$$

其中,  $\tilde{\omega}_{ib}^b$  是陀螺仪角速度测量值;  $\omega_{ib}^b$  是真实的角速度信息;  $\mathbf{b}_\omega$  是陀螺仪零偏;  $S_\omega$  是陀螺仪比例因子;  $\varepsilon_\omega$  是陀螺仪高频随机噪声。

加速度计实际测量模型如下,

$$\tilde{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}^b + \mathbf{b}_f + S_f \cdot \mathbf{f}^b + \varepsilon_f \quad (2-15)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{f}}^b$  是加速度计比力测量值;  $\mathbf{f}^b$  是真实的比力信息;  $\mathbf{b}_f$  是加速度计零偏;  $S_f$  是加速度计比例因子;  $\varepsilon_f$  是加速度计高频随机噪声。

### 2.2.3 INS 机械编排

目前, INS 机械编排的算法研究工作比较多且相对成熟<sup>[26, 29-33]</sup>。INS 导航解算中的导航坐标系选择不同的参考坐标系, 则会产生不同的 INS 机械编排。由于选取当地地理坐标系为导航坐标系时, INS 机械编排可以直接提供载体绕地球运动的导航参数 (如纬度和经度等位置信息、北向-东向-垂向速度信息、姿态信息), 不需要再进行由于参考坐标系选取不合理而导致的参数转换等工作。因此, 本小节只对当地地理坐标系 (即导航坐标系) 下的 INS 机械编排进行介绍。INS 机械编排是通过连续的 INS 导航微分方程推导而得到, 下式为 INS 导航微分方程,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^n \\ \dot{\mathbf{C}}_n^e \\ \dot{h} \\ \dot{\mathbf{C}}_b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}_l^n \\ \mathbf{C}_n^e (\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times) \\ -v_D \\ \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

式中,  $\mathbf{v}^n$  为  $n$  系下的载体速度。  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  为  $n$  系下  $e$  系相对于  $i$  系的旋转角速度。  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  为  $n$  系下  $n$  系相对于  $e$  系的旋转角速度。  $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$  为  $n$  系下  $n$  系相对于  $i$  系的旋转角速度。  $v_D$  为  $n$  系下垂向速度。  $\mathbf{g}_l^n$  为当地重力加速度在  $n$  系下的投影。

INS 导航微分方程(2-16)的速度微分方程中载体相对于地球表面的速度变化率是由以下几项构成。

- 1) 加速度计输出的比力信息:  $\mathbf{f}^b$ 。
- 2) 由载体在旋转地球表面运动引起的加速度改正项, 称为哥氏加速度:  $2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{v}^n$ 。

- 3) 载体在地球表面运动受指向地球中心的引力作用而产生的向心加速度： $\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v}^n$ 。
- 4) 载体所受重力的补偿项： $\mathbf{g}_l^n$ 。

### 2.2.3.1 IMU 误差补偿

捷联式高精度 IMU 输出信息一般为离散形式，即角度增量  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k$  和速度增量  $\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{f,k}^b$ 。低成本 IMU 通常以角速度  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$  和比力  $\tilde{\mathbf{f}}^b$  的形式作为原始输出信息，可通过对时间积分将其转换为增量形式 (El-Sheimy, 2002; Shin, 2005; 牛小骥, 2013)，

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = \int_{t_{k-1}}^t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b dt \quad (2-17)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{f,k}^b = \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{f}^b dt \quad (2-18)$$

如上所述，由于陀螺和加速度计的输出值中存在零偏、比例因子等误差的影响，所以在导航解算时必须先对惯性器件的输出值进行误差补偿，

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_\omega^0)^{-1} (\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \mathbf{b}_\omega^0 \cdot \Delta t_k) \approx (\mathbf{I} - \mathbf{S}_\omega^0) (\Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \mathbf{b}_\omega^0 \cdot \Delta t_k) \quad (2-19)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^b = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_f^0)^{-1} (\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{f,k}^b - \mathbf{b}_f^0 \cdot \Delta t_k) \approx (\mathbf{I} - \mathbf{S}_f^0) (\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{f,k}^b - \mathbf{b}_f^0 \cdot \Delta t_k) \quad (2-20)$$

其中， $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ 。上标“0”表示当前历元传感器误差为估计后的已知量。

### 2.2.3.2 速度更新

由方程(2-16)速度微分方程，可积分得到速度更新方程为：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k^n &= \mathbf{v}_{k-1}^n + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \mathbf{C}_b^n(t) \mathbf{f}^b(t) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}_l^n \right] dt \\ &\triangleq \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta\mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n \end{aligned} \quad (2-21)$$

式中  $\Delta\mathbf{v}_{f,k}^n$  是由比力产生的速度增量，采用双子样算法（即假设角速度和加速度在相邻历元间是线性变化）且考虑导航坐标系变化的旋转矢量  $\boldsymbol{\zeta}_k$  影响，可得其近似表达式，

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^n = [\mathbf{I} - (0.5\boldsymbol{\zeta}_k \times)] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \left[ \Delta\mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\theta}_k \times \Delta\mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{12} (\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\mathbf{v}_{f,k}^b + \Delta\mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k) \right] \quad (2-22)$$

其中， $\frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\theta}_k \times \Delta\mathbf{v}_{f,k}^b$  为旋转效应补偿项， $\frac{1}{12} (\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\mathbf{v}_{f,k}^b + \Delta\mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k)$  为划桨效应补偿项。

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \left[ \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2-23)$$

式中，下标  $k-1/2$  表示  $[t_{k-1}, t_k]$  的中间时刻。 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  和  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  都是位置和速度的函数。由于  $t_k$  时刻的位置和速度信息还未获得，因此，中间时刻的位置和速度需要通过外推方式进行求解，具体求解方程见“位置更新”。

$\Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n$  是由哥氏加速度、向心加速度和重力加速度共同产生的速度增量补偿项，表示为：

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n = [\mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2-24)$$

### 2.2.3.3 位置更新

基于更新后的速度信息直接进行位置更新算法推导较为复杂，但是思路和速度更新算法类似，本文不再对采用此种表达形式的位置更新方法进行介绍<sup>[27, 29]</sup>。 $n$ 系到 $e$ 系的四元数 $\mathbf{q}_n^e$ 包含纬度和经度信息，因此本文采用四元数方法对位置四元数 $\mathbf{q}_n^e$ 进行更新进而完成纬度和经度的位置更新过程，如下式所示，

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{e(k-1)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)} \quad (2-25)$$

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)} = \mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)} \otimes \mathbf{q}_{n(k)}^{e(k-1)} \quad (2-26)$$

$\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)}$  和  $\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)}$  分别有如下表达形式：

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\boldsymbol{\zeta}_k\| \\ \frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\zeta}_k\|}{\|\boldsymbol{\zeta}_k\|} \boldsymbol{\zeta}_k \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

$$\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\boldsymbol{\xi}_k\| \\ -\frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\xi}_k\|}{\|\boldsymbol{\xi}_k\|} \boldsymbol{\xi}_k \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

其中， $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \Delta t_k$  是 $e$ 系在相邻历元间的旋转矢量。由于速度已经完成更新，中间时刻的速度可以通过内插方式获得， $\mathbf{v}_{k-1/2}^n = (\mathbf{v}_{k-1}^n + \mathbf{v}_k^n)/2$ 。纬度和经度可从 $\mathbf{q}_n^e$ 中解析获得，而高程方向更新时需要单独的通过垂向速度积分完成，如下式所示：

$$h_k = h_{k-1} - \mathbf{v}_{D,k-1/2} \Delta t_k \quad (2-29)$$

### 2.2.3.4 姿态更新

姿态四元数更新算法有如下表示形式

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k-1)} = \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (2-30)$$

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{n(k-1)} \quad (2-31)$$

其中， $b$ 系在 $k$ 时刻和 $k-1$ 时刻之间的四元数 $\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$ 为：

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\boldsymbol{\phi}_k\| \\ \frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\phi}_k\|}{\|\boldsymbol{\phi}_k\|} \boldsymbol{\phi}_k \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

其中， $\boldsymbol{\phi}_k$ 为 $b$ 系从 $t_{k-1}$ 时刻到 $t_k$ 时刻的等效旋转矢量。等效旋转矢量微分方程（即Bortz方程）的工程常用近似表达式如下<sup>[27, 34]</sup>。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\phi}}_k &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}_k \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{12} \boldsymbol{\phi}_k \times (\boldsymbol{\phi}_k \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \\ &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (2-33)$$

对上式积分可得<sup>[26, 29, 35]</sup>

$$\begin{aligned}\phi_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta\theta(t) \times \omega_{ib}^b \right] dt \\ &\approx \Delta\theta_k + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k\end{aligned}\quad (2-34)$$

其中,  $\frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k$  是二阶圆锥误差项。n 系从  $t_{k-1}$  时刻到  $t_k$  时刻的四元数  $\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)}$  为,

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\zeta_k\| \\ -\frac{\sin\|0.5\zeta_k\|}{\|\zeta_k\|} \zeta_k \end{bmatrix}\quad (2-35)$$

由于位置已经完成更新, 中间位置可通过内插求解, 因此,  $\zeta_k$  需要根据更新内插位置进行重新解算。高程方向可简单地采用取平均方式进行内插:  $h_{k-1/2} = (h_{k-1} + h_k)/2$ 。 $t_{k-1}$  到  $t_k$  的位置变化四元数:

$$\mathbf{q}_{\delta\theta} = (\mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)})^{-1} \otimes \mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)}\quad (2-36)$$

通过该式可求解旋转矢量  $\delta\theta$ , 然后位置信息中纬度和经度可由下式内插得到,

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{0.5\delta\theta}\quad (2-37)$$

其中,  $\mathbf{q}_{0.5\delta\theta}$  是旋转矢量  $0.5\delta\theta$  对应的四元数。

由于计算误差等因素的影响, 计算过程中  $\mathbf{q}_b^n$  会逐渐失去归一化特性, 即  $\|\mathbf{q}_b^n\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 1$ 。因此, 在  $\mathbf{q}_b^n$  每次得到更新后或更新若干步后需要进行归一化处理, 如下:

$$\begin{aligned}e_q &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{q}_b^n)^T \mathbf{q}_b^n - 1 \right] \\ \mathbf{q}_b^n &= (1 - e_q) \mathbf{q}_b^n\end{aligned}\quad (2-38)$$

其中,  $e_q$  是四元数中的归一化误差。

## 2.2.4 INS 误差方程

由于惯性传感器误差和重力场不确定性的影响, 通过 INS 机械编排获得的导航参数存在导航误差。目前, 已有针对于不同应用场景的数学模型来描述导航误差随时间的传播特性。其中, c 系是由 INS 位置估计值所确定的参考坐标系(即假设的 n 系), 整个导航过程中 c 系随载体一起运动, 它与真实 n 系之间的  $\psi$  角差异随位置变化而变化<sup>[26]</sup>。本文中的 INS 误差方程便是基于 c 系下的  $\psi$  角误差模型而建立, 所以本节对在 c 系下的  $\psi$  角误差模型进行介绍和推导。首先给出速度误差方程的推导过程。

### 2.2.4.1 速度误差方程

c 系下真实速度的微分方程如下:

$$\dot{\mathbf{v}}_t^c = \mathbf{f}_t^c - (2\omega_{ie}^c + \omega_{ec}^c) \times \mathbf{v}_t^c + \mathbf{g}_t^c\quad (2-39)$$

式中, 下标“t”表示参数为真实值。由于 INS 导航系统存在误差, 则有以下式:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{v}_t^c + \delta \mathbf{v}^c \\ \hat{\mathbf{g}}^n &= \mathbf{g}_t^c + \delta \mathbf{g}^c\end{aligned}\quad (2-40)$$

式中,  $\delta \mathbf{v}^c$  和  $\delta \mathbf{g}^c$  分别为  $\boldsymbol{\psi}$  角误差分析下的速度误差和重力加速度误差。 $\hat{\mathbf{v}}^n$  和  $\hat{\mathbf{g}}^n$  分别为  $n$  系下 INS 导航解算得到的速度和重力加速度。在  $c$  系下进行误差分析时, 由于导航位置和  $c$  系的变化率均可从 INS 导航解算中获得, 可认为其是已知的, 因此  $\mathbf{C}_c^e$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^c$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{ic}^c$  是没有误差扰动, 即有:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n &= \boldsymbol{\omega}_{ie}^c \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n &= \boldsymbol{\omega}_{ic}^c\end{aligned}\quad (2-41)$$

此时在  $p$  系下捷联式惯性导航系统计算的速度微分方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}^n = \mathbf{f}_t^p + \delta \mathbf{f}^p - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^c + \boldsymbol{\omega}_{ec}^c) \times \hat{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{g}}^n \quad (2-42)$$

结合(2-11)式有

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{C}_c^p \mathbf{f}^c = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\psi} \times)] \mathbf{f}^c = \mathbf{f}^c + \mathbf{f}^c \times \boldsymbol{\psi} \quad (2-43)$$

并将(2.39)、(2.40)和(2.43)代入(2.42)可得到

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^c = \mathbf{f}^c \times \boldsymbol{\psi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^c + \boldsymbol{\omega}_{ec}^c) \times \delta \mathbf{v}^c + \delta \mathbf{g}^c + \delta \mathbf{f}^p \quad (2-44)$$

其中,  $\delta \mathbf{g}^c$  为重力误差在  $c$  系下的表现形式, 如下:

$$\delta \mathbf{g}^c = \begin{bmatrix} -g \delta r_N & -g \delta r_E & 2g \delta r_D \\ R_M + h & R_N + h & R + h \end{bmatrix}^T \quad (2-45)$$

#### 2.2.4.2 姿态误差方程

$\boldsymbol{\psi}$  角是平台坐标系和计算坐标系之间的旋转矢量。平台坐标系的旋转角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ip}^p$  和计算坐标系的旋转角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ic}^c$  存在关系式:

$$\boldsymbol{\omega}_{ip}^p = \boldsymbol{\omega}_{ic}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2-46)$$

结合(2.11)式和  $\boldsymbol{\omega}_{ip}^p = \boldsymbol{\omega}_{ic}^p + \boldsymbol{\omega}_{cp}^p$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{C}_b^p \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ , 则有

$$\boldsymbol{\omega}_{cp}^p = -\boldsymbol{\omega}_{ic}^c \times \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varepsilon}^p = -\boldsymbol{\omega}_{ic}^c \times \boldsymbol{\psi} - \mathbf{C}_b^p \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2-47)$$

式中,  $\boldsymbol{\omega}_{cp}^p$  是平台坐标系相对于计算坐标系的旋转角速度。若  $\boldsymbol{\psi}$  为小角度旋转矢量, 则有关系式:  $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\omega}_{cp}^p$ 。因此  $\boldsymbol{\psi}$  角的姿态误差方程为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\omega}_{ic}^c \times \boldsymbol{\psi} - \mathbf{C}_b^p \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2-48)$$

#### 2.2.4.3 位置误差方程

捷联式惯性导航系统在某时刻的真实位置信息为:

$$\mathbf{r}_t^e = \int_0^t \mathbf{C}_c^e \mathbf{v}_t^c d\tau \quad (2-49)$$

此时, 捷联式惯性导航系统导航解算的位置信息为:

$$\hat{\mathbf{r}}^e = \int_0^t \mathbf{C}_c^e \hat{\mathbf{v}}^n d\tau \quad (2-50)$$

位置误差  $\delta \mathbf{r}^e$  为  $\mathbf{r}_t^e$  和  $\hat{\mathbf{r}}^e$  之间的差异, 并考虑方程(2.40)中惯性导航系统的速度扰动方程, 则有:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}^e &= \hat{\mathbf{r}}^e - \mathbf{r}^e \\
 &= \int_0^t \mathbf{C}_c^e \hat{\mathbf{v}}^n d\tau - \int_0^t \mathbf{C}_c^e \mathbf{v}_t^c d\tau \\
 &= \int_0^t \mathbf{C}_c^e \delta \mathbf{v}^c d\tau
 \end{aligned} \tag{2-51}$$

将上式中位置误差  $\delta \mathbf{r}^e$  投影到  $c$  系下, 有:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}^c &= \mathbf{C}_e^c \delta \mathbf{r}^e \\
 &= \mathbf{C}_e^c \int_0^t \mathbf{C}_c^e \delta \mathbf{v}^c d\tau
 \end{aligned} \tag{2-52}$$

对上式进行微分运算, 同时考虑  $\dot{\mathbf{C}}_e^c = \mathbf{C}_e^c (\boldsymbol{\omega}_{ce}^e \times)$ , 则有:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{\mathbf{r}}^c &= \left( \mathbf{C}_e^c \int_0^t \mathbf{C}_c^e \delta \mathbf{v}^c d\tau \right)' \\
 &= \dot{\mathbf{C}}_e^c \int_0^t \mathbf{C}_c^e \delta \mathbf{v}^c d\tau + \delta \mathbf{v}^c \\
 &= -\boldsymbol{\omega}_{ec}^c \times \delta \mathbf{r}^c + \delta \mathbf{v}^c
 \end{aligned} \tag{2-53}$$

综上所述, 基于  $c$  系下所产生的误差模型如下,

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{\mathbf{r}}^c &= -\boldsymbol{\omega}_{ec}^c \times \delta \mathbf{r}^c + \delta \mathbf{v}^c \\
 \delta \dot{\mathbf{v}}^c &= \mathbf{f}^c \times \boldsymbol{\psi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^c + \boldsymbol{\omega}_{ec}^c) \times \delta \mathbf{v}^c + \delta \mathbf{g}^c + \mathbf{C}_b^p \delta \mathbf{f}^b \\
 \dot{\boldsymbol{\psi}}^c &= -(\boldsymbol{\omega}_{ie}^c + \boldsymbol{\omega}_{ec}^c) \times \boldsymbol{\psi}^c - \mathbf{C}_b^p \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b
 \end{aligned} \tag{2-54}$$

因为姿态误差以  $\boldsymbol{\psi}$  角的形式进行表达, 所以一般将这种 INS 误差模型称为  $\boldsymbol{\psi}$  角误差模型。对于  $\boldsymbol{\psi}$  角误差模型与其他误差模型 (如  $\boldsymbol{\phi}$  角误差模型) 的等价性等问题也已经进行了较多的研究和验证<sup>[36, 37]</sup>, 本文就不再赘述。

## 2.3 GNSS/INS 组合导航

GNSS/INS 组合导航可以利用 GNSS 和 INS 之间的互补特性产生比任何一个独立工作的分系统更可靠的导航系统。Kalman 滤波是 GNSS 信息和 INS 信息组合时最常用的数据融合算法, 可以根据各系统的信息质量有效地将其组合。然而, GNSS 信号容易受到外界干扰而减弱甚至失锁, 此时独立工作的 INS 系统由于受到 IMU 误差的影响导致导航解算结果发散。为了解决这一问题, GNSS/INS 组合导航数据后处理中通常采用最优平滑算法来保证导航解算精度。在 GNSS/INS 组合导航算法设计时, 需要对 IMU 误差建模进而完成 IMU 误差的在线估计与补偿, 通常可以利用几种常见的随机过程进行 IMU 误差建模。本节首先对 Kalman 滤波和最优平滑算法进行介绍。其次, 介绍几种常见的随机过程。

GNSS/INS 组合导航方案设计时根据其对 GNSS 的信息利用以及对 GNSS 接收机的辅助作用分为三种典型的组合结构: 松组合、紧组合和深组合。本节不对紧组合和深组合进行具体描述, 仅以 GNSS/INS 松组合为例, 阐述 GNSS/INS 组合导航算

法。

### 2.3.1 卡尔曼滤波

1960 年卡尔曼 (R.E.Kalman) 首次提出了卡尔曼滤波算法 (后简称 Kalman 滤波), 其后作为一种最重要的最优估计理论被广泛应用于各种领域<sup>[38]</sup>。简单来说, Kalman 滤波是一种最优递推数据处理算法。“最优”不仅指其性能评估准则采用均方误差最小且最优的线性最小方差估计, 还指其可以利用所有可用信息对当前信息进行估计, 此处的所有可用信息包括: 系统方程 (即动力学方程) 和观测量; 系统噪声、观测噪声和动态模型的不确定性; 可用初始信息。“递推”则说明 Kalman 滤波不需要保存和重新处理所有前期数据, 对滤波实用性有着至关重要的作用。“滤波”实际上是一种可直接在计算机上实现的离散型数据处理算法<sup>[39-46]</sup>。

设  $t_{k+1}$  时刻被估状态向量  $\mathbf{x}_{k+1}$  对应的状态方程的随机线性离散形式可表述为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2-55)$$

其中,  $\Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k)$  为  $t_k$  时刻至  $t_{k+1}$  时刻的状态转移矩阵。 $\mathbf{w}_k$  为离散化后系统噪声, 有  $\mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau$ 。 $\mathbf{G}(\tau)$  为连续系统噪声驱动矩阵,  $\mathbf{w}(\tau)$  为连续系统噪声。 $\mathbf{z}_k$  为  $\mathbf{x}_{k+1}$  的量测信息且满足线性关系, 量测方程为:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2-56)$$

$\mathbf{z}_k$  为量测向量,  $\mathbf{H}_k$  为观测矩阵,  $\mathbf{v}_k$  为观测噪声。同时,  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  满足如下统计特性,

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k) \\ E(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) = 0, \text{ 对所有 } k \text{ 和 } j \end{cases} \quad (2-57)$$

式中,  $\mathbf{Q}_k$  为系统噪声协方差阵,  $\mathbf{R}_k$  为观测噪声协方差阵。如果被估状态  $\mathbf{x}_{k+1}$  满足式(2.55), 相应的观测向量  $\mathbf{z}_k$  满足式(2.56), 系统噪声  $\mathbf{w}_k$  和观测噪声  $\mathbf{v}_k$  满足式(2.57), 系统噪声协方差阵  $\mathbf{Q}_k$  为正定, 观测噪声协方差阵  $\mathbf{R}_k$  为正定, 则  $\mathbf{x}_{k+1}$  的估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  可通过一组方程式进行描述。该组方程式具体可表达为两个信息更新过程: 时间更新过程和量测更新过程。其中, 时间更新过程利用时间更新方程实现对当前状态的先验估计, 及时向前推算当前状态变量和估计的误差协方差阵, 以便为下一时刻状态构造先验估计值; 量测更新过程利用量测更新方程在时间更新过程中获得的先验估计值和当前观测量的基础之上建立起对当前状态的量测更新的后验估计。下面具体给出了离散 Kalman 滤波的时间更新和量测更新方程。

时间更新过程包括状态预测方程和对应的预测误差协方差阵, 具体方程描述如下,

1) 状态预测方程:



$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (2-58)$$

式中， $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  为  $k$  时刻状态时间更新值， $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  为  $k-1$  时刻状态量测更新后的估计值。

2) 预测误差协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2-59)$$

式中， $\mathbf{P}_k^-$  为  $k$  时刻预测误差协方差矩阵， $\mathbf{P}_{k-1}^+$  为  $k-1$  时刻量测更新后误差协方差矩阵， $\mathbf{Q}_{k-1}$  为经过离散后的系统噪声协方差阵。

量测更新过程包括状态更新方程、量测更新后误差协方差矩阵、卡尔曼增益矩阵。其中，卡尔曼增益矩阵的确定是以误差协方差矩阵对角线元素之和最小为准则。具体方程描述如下，

3) 状态估计:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2-60)$$

式中， $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  为  $k$  时刻量测更新后的状态估计值， $\mathbf{K}_k$  为由方程(2.61)进行求解的 Kalman 滤波增益。 $\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$  为新息序列，理论上该序列为零均值白噪声序列且其方差为  $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_{k+1}$ 。

4) 卡尔曼增益矩阵:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2-61)$$

5) 量测更新后误差协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2-62)$$

方程 (2.61) 中  $( )^{-1}$  表示矩阵求逆。方程 (2.62) 中  $\mathbf{P}_k^+$  是以 Joseph 形式表示，方程右侧是正定（或非负定）的对称阵相加，其目的是为了避开由于计算误差积累造成  $\mathbf{P}_k^+$  失去正定性甚至对称性。 $\mathbf{K}_k$  和  $\mathbf{P}_k^+$  有多种表达形式，但是有些表达式并不能满足计算的鲁棒性。状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ 、滤波增益矩阵  $\mathbf{K}_k$  和误差协方差  $\mathbf{P}_k^+$  方程表现为一个渐近稳定的系统，因此，随着时刻  $k$  的增加，状态向量  $\hat{\mathbf{x}}_k$  的估计逐渐不受初始信息  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和  $\mathbf{P}_0$  的影响。

### 2.3.2 最优平滑算法

Kalman 滤波只能基于现有的量测信息来估计当前状态，如果进行数据后处理时，其对数据的利用率不够充分。平滑过程可利用时段  $[0 \sim T]$  内所有量测信息对任一时刻  $t (0 \leq t \leq T)$  的系统状态量进行估计。从数据利用率来看，平滑过程比滤波过程有很大的优势，平滑过程可以被看作是正反两次滤波的组合。正向滤波是基于时刻  $t$  之前所有数据对  $\hat{\mathbf{x}}_f$  进行估计，反向滤波是基于时刻  $t$  之后所有数据对  $\hat{\mathbf{x}}_b$  进行估计，两次滤波估计值  $\hat{\mathbf{x}}_f$  和  $\hat{\mathbf{x}}_b$  进行最优组合实现平滑过程，从而充分利用所有可用信息，其公式描述如下 (Shin, 2005)，

$$\mathbf{P}_{sm} = (\mathbf{P}_f^{-1} + \mathbf{P}_b^{-1})^{-1} \quad (2-63)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{sm} &= \mathbf{P}_{sm} (\mathbf{P}_f^{-1} \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{P}_b^{-1} \hat{\mathbf{x}}_b) \\ &= \mathbf{P}_{sm} (\mathbf{P}_f^{-1} \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{P}_b^{-1} \hat{\mathbf{x}}_f - \mathbf{P}_b^{-1} \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{P}_b^{-1} \hat{\mathbf{x}}_b) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{P}_{sm} \mathbf{P}_b^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_b - \hat{\mathbf{x}}_f) \end{aligned} \quad (2-64)$$

式中，下表  $f$ ， $b$  和  $sm$  分别表示正向滤波、反向滤波和最优平滑。图 2-5 给出了正、反向滤波和最优平滑的误差协方差变化特性。需要注意的是，最优平滑算法是一种非实时模式的数据处理方案，具有时间滞后性，基本无法实现计算的实时性。

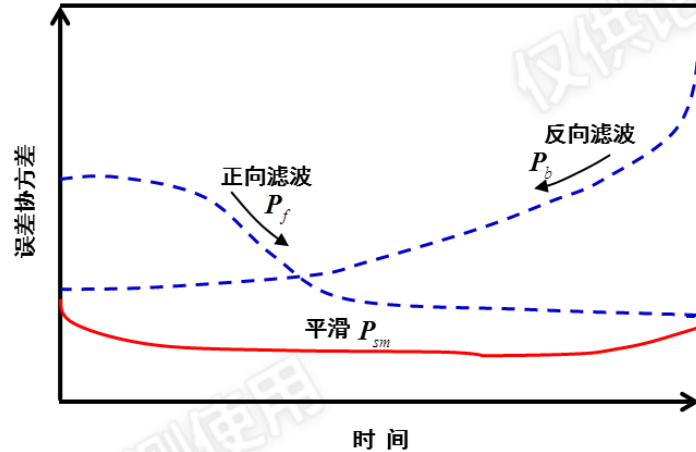


图 2-5 正反向滤波后再平滑时估计误差协方差变化曲线图

最优平滑可分为固定点平滑、固定滞后平滑和固定区间平滑三种类型<sup>[39-41]</sup>。固定点平滑指利用区间内所有观测值来估计区间内所关心或者较为重要的某个固定时刻状态量，例如利用卫星轨道观测数据估计其进入轨道时的初始状态。固定滞后平滑是指利用区间内所有观测值来估计某个确定的固定滞后值对应时刻的状态，它是一种有时间延迟的在线估计方法且常用于对在线估计有较高精度要求的通信和遥测数据处理等。固定区间平滑是指利用时间区间内所有观测值估计区间中每个时刻的状态，常用于典型后处理模式的导航与测绘应用。因此，本节重点介绍固定区间平滑。Rauch-Tung-Striebel (RTS) 平滑算法是一种适用于线性滤波中常用的固定滞后平滑<sup>[47]</sup>。图 2-6 以 GNSS/INS 组合导航位置误差为例阐述了 RTS 平滑算法相对于 Kalman 滤波的优势。从图中可以直观地看出 RTS 平滑算法虽然不直接进行观测数据的反向滤波过程，但是其等效于正向滤波和反向滤波最优组合方式。RTS 平滑算法的具体公式描述如下<sup>[41]</sup>,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/N} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k} + \mathbf{A}_k [\hat{\mathbf{x}}_{k+1/N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}] \quad (2-65)$$

$$\mathbf{P}_{k/N} = \mathbf{P}_{k/k} + \mathbf{A}_k [\mathbf{P}_{k+1/N} - \mathbf{P}_{k+1/k}] \mathbf{A}_k^T \quad (2-66)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{P}_{k+1/k}^{-1} \quad (2-67)$$

式中， $k = N-1, N-2, \dots, 0$ ， $N$  为观测信息的总数， $\mathbf{A}_k$  平滑增益矩阵。

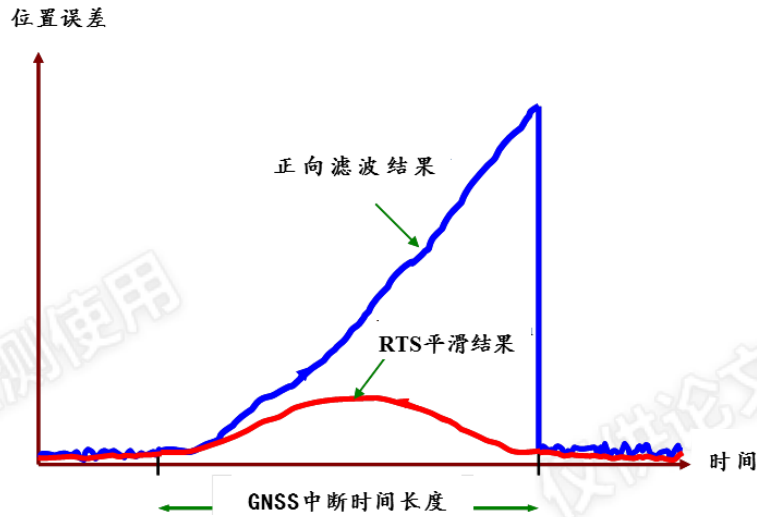


图 2-6 RTS 平滑算法优势表现 (以 GNSS/INS 组合导航位置误差为例)

图 2-7 是 RTS 平滑算法流程图。RTS 平滑过程可以分成两步。第一步就是 Kalman 滤波器的作用，每次 Kalman 滤波运算得到的状态向量及其误差协方差阵都要保存下来。如果执行 Kalman 滤波时间更新过程，则状态向量及其误差协方差矩阵同时保存；如果执行 Kalman 滤波量测更新过程，则观测信息不需要保存，因为 RTS 平滑直接作用于状态向量。第二步将利用第一步保存的数据进行反向平滑过程。

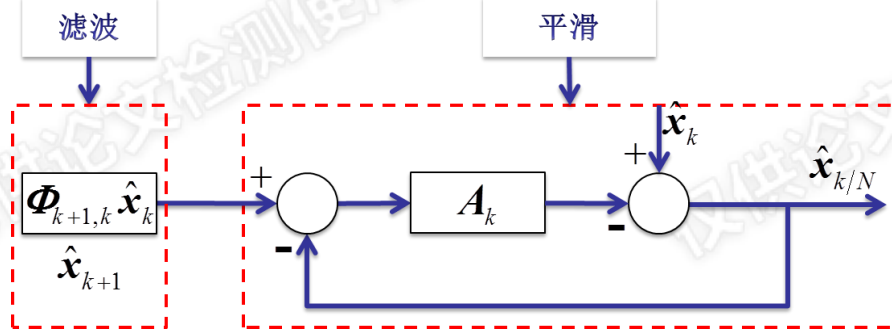


图 2-7 RTS 平滑算法流程图

### 2.3.3 常见随机过程

IMU 误差建模中几种常见的随机过程包括白噪声、随机游走、随机常数和一阶高斯-马尔科夫过程<sup>[26, 42]</sup>。下面分别介绍每种随机过程。

#### 2.3.3.1 白噪声和随机游走

白噪声是一种功率谱密度为常数的平稳随机过程，理想的白噪声具有无限带宽，因而其能量是无限大，但其在现实世界中是不可能存在的。一般我们认为只要一个噪声过程所具有的频谱宽度远远大于它所作用系统的带宽，并且在该带宽中其功率谱密度基本上可以作为常数来考虑，就可以把此种噪声作为白噪声来处理。随机游走过程可以看作白噪声的积分，两者的关系如图 2.14 所示。随机游走连续状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \quad (2-68)$$

此处， $\boldsymbol{\omega}$  为白噪声过程，满足  $E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\omega}(\tau)] = q(t)\delta(t-\tau)$ 。 $q(t)$  为白噪声方差强度。 $\delta(t-\tau)$  为狄拉克函数，满足  $\delta(t-\tau) = 0, t \neq \tau$  且  $\int_a^b \delta(t-\tau)dt = 1$ 。随机游走的离散形式为：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2-69)$$

此处，随机游走离散方程中离散化的白噪声方差为  $q_k = q(t)\Delta t_{k+1}$ ， $\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ 。离散化的随机游走的方差为：

$$E[\mathbf{x}^2] = q(t)t \quad (2-70)$$

由于加速度计和陀螺仪输出信号在 INS 硬件系统中进行了积分处理，所以加速度和角速度的白噪声部分也相应的积分成为速度随机游走和角度随机游走，它们直接影响速度和姿态的不确定度。

### 2.3.3.2 随机常数

连续型和离散型随机常数分别满足方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2-71)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k \quad (2-72)$$

随机常数可应用于 IMU 短时间工作时的零偏建模。如果 IMU 长时间工作，那么为了阻止 Kalman 滤波的状态方差阵逐渐趋于负定情况，最好的方法就是增加噪声，但是这样就产生了随机游走。

### 2.3.3.3 一阶高斯马尔科夫过程

连续型一阶高斯-马尔科夫过程满足方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{T}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \quad (2-73)$$

一阶高斯马尔科夫过程的驱动白噪声的方差强度为  $q = \frac{2\sigma^2}{T}$ ，其中  $\sigma^2$  和  $T$  分别为一阶高斯-马尔科夫过程的均方值和相关时间。一阶高斯-马尔科夫过程的离散化模型为：

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{-\Delta t_{k+1}/T}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2-74)$$

此处，离散化驱动白噪声的方差强度为  $q_k = \sigma^2(1 - e^{-\Delta t_{k+1}/T})$ 。一阶高斯-马尔科夫过程需要  $\sigma^2$  和  $T$  两个参数来描述。由于一阶高斯-马尔科夫过程符合大多数物理过程且有一个相对简单的数学描述，因此其应用较为广泛。一阶高斯-马尔科夫过程常用于随时间变化缓慢的 IMU 误差建模（如零偏和比例因子）。

以上几种常见随机过程的离散形式可以统一表达为

$$\mathbf{x}_{k+1} = a\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2-75)$$

式中， $a$  为模型参数， $\boldsymbol{\omega}_k$  为驱动白噪声。

表 2-1 汇总了这几种常见随机过程的特点。

表 2-1 几种常见随机过程特点汇总表

	离散化模型	$a$	$q_k = E[\omega_k^2]$
随机游走	$x_{k+1} = x_k + \omega_k$	1	$q_k = q(t)\Delta t_{k+1}$
随机常数	$x_{k+1} = x_k$	1	$q_k = 0$
高斯-马尔科夫	$x_{k+1} = e^{-\Delta t_{k+1}/T} x_k + \omega_k$	$e^{-\Delta t_{k+1}/T}$	$q_k = \sigma^2(1 - e^{-\Delta t_{k+1}/T})$

### 2.3.4 GNSS/INS 组合导航算法

GNSS/INS 松组合的主要优点是实现简单和有冗余度。松组合 Kalman 滤波器通常使用 GNSS 位置和/或速度信息作为观测输入量。虽然可以单独使用 GNSS 位置测量更新对惯性传感器进行辅助，但是位置测量和速度测量同时使用可以获得更为可靠的导航解算方案。这是因为在系统模型和测量模型中，INS 姿态和传感器误差到速度的积分或者差分环节要比到位置的相应环节少，因此使用速度测量就减少了估计 INS 姿态误差和传感器误差的时间延迟，提高了 INS 姿态和传感器误差的可观性。然而，若是单独使用 GNSS 速度更新便会降低 INS 位置误差的可观性，进而影响速度和姿态的估计精度，所以通常不单独使用速度信息<sup>[28]</sup>。本文在 GNSS/INS 组合导航算法设计中既可以使用 GNSS 位置测量和速度测量同时更新，也可以单独使用 GNSS 位置测量更新，其具体框图如图 2-8 所示<sup>[46, 48]</sup>。

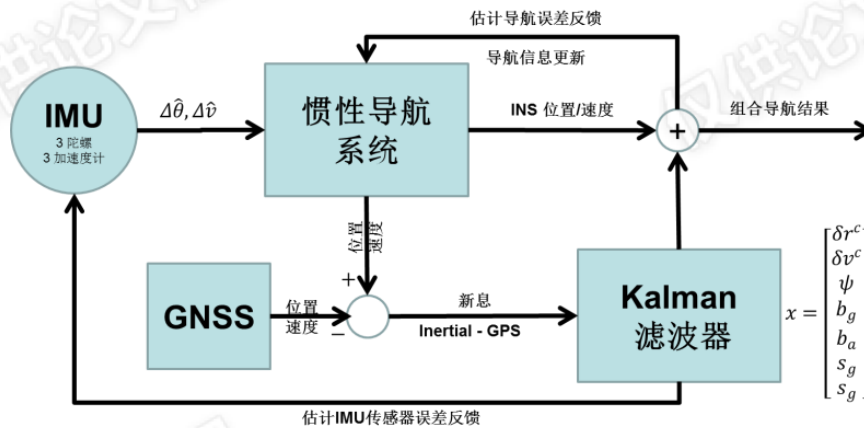


图 2-8 GNSS/INS 组合导航 Kalman 滤波算法框图

下面我们依次介绍 GNSS/INS 组合导航算法设计中的系统状态方程和观测方程。

#### 2.3.4.1 系统状态方程

GNSS/INS 组合导航 Kalman 滤波器的设计首先要合理地选取系统状态量。为了避免 GNSS/INS 组合导航系统状态模型存在非线性化问题，一般选用误差状态模型。系统状态量中至少应该包含位置误差、速度误差和姿态误差。另外，为了实现 IMU 误差在线标定与补偿，可适当地增加某些 IMU 误差作为增广状态量。与 IMU 零偏相比，比例因子对 GNSS/INS 组合导航的影响较小。但是，对于低端 IMU(如 MEMS)来说比例因子也是不可忽视的。考虑到 GNSS/INS 组合导航算法的普适性，本节设

计的 GNSS/INS 组合导航算法同时对 IMU 零偏和比例因子进行在线估计。GNSS/INS 组合导航 Kalman 滤波器的误差状态向量为 21 维，包括 3 个位置误差  $\delta r^e$ ，3 个速度误差  $\delta v^e$ ，3 个姿态角误差  $\psi$ ，3 个陀螺零偏  $b_g$ ，3 个加速度计零偏  $b_a$ ，3 个陀螺比例因子  $s_g$ ，3 个加速度计比例因子  $s_a$ 。其中，陀螺和加速度计零偏和比例因子均建模成一阶高斯-马尔科夫过程（见公式 (2.73)）。

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{b}} \\ \dot{\mathbf{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_b} \mathbf{b} \\ -\frac{1}{T_s} \mathbf{s} \end{pmatrix} + \mathbf{w} \quad (2-76)$$

式中， $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{s}$  为 IMU 误差，包括零偏 ( $b_g, b_a$ ) 和比例因子 ( $s_g, s_a$ )。  $T_b, T_s$  为一阶高斯-马尔可夫过程的相关时间（注意， $T_b$  与  $T_s$  不一定相等）。综合  $\psi$  角误差模型 (2.54) 和 IMU 误差模型 (2.76) 构建 GNSS/INS 组合导航 Kalman 滤波器的误差状态方程（连续型）为：

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (2-77)$$

其中， $\mathbf{F}(t)$  为系统状态的转移矩阵。 $\mathbf{w}(t)$  为系统噪声， $\mathbf{G}(t)$  为系统噪声的驱动阵。 $\delta \mathbf{x}(t)$  为系统误差状态向量，表示为，

$$\delta \mathbf{x}(t) = [\delta r^e \quad \delta v^e \quad \psi \quad b_g \quad b_a \quad s_g \quad s_a]^T \quad (2-78)$$

#### 2.3.4.2 位置观测方程

设 GNSS 天线相位中心在  $n$  系中的位置为  $\mathbf{r}_{GNSS}^n$ ，IMU 中心在  $n$  系中的位置为  $\mathbf{r}_{IMU}^n$ ， $\mathbf{r}_{GNSS}^n$  和  $\mathbf{r}_{IMU}^n$  两者在空间位置上存在不同步或者不一致的现象，即杆臂效应，如图 2-9 所示。如果 GNSS 天线相位中心到 IMU 中心的杆臂向量为  $\mathbf{l}_{GNSS}^b$ ，则存在如下关系：

$$\mathbf{r}_{GNSS}^n = \mathbf{r}_{IMU}^n + \mathbf{D}_R^{-1} \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \quad (2-79)$$

$$\mathbf{D}_R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_N + h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2-80)$$

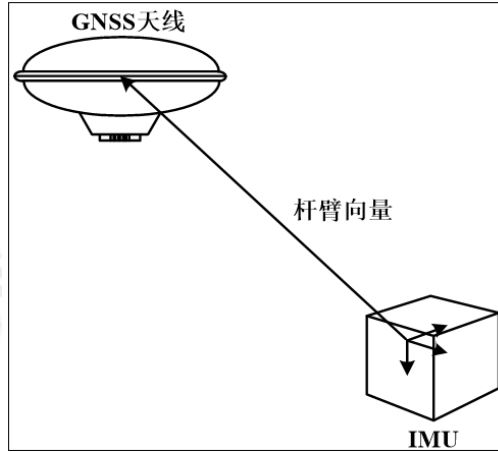


图 2-9 GNSS 天线和 IMU 杆臂效应示意图

由 INS 推算的 GNSS 天线相位中心的位置可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^n &= \hat{\mathbf{r}}_{IMU}^n + \mathbf{D}_R^{-1} \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \\ &= \mathbf{r}_{IMU}^n + \mathbf{D}_R^{-1} \delta \mathbf{r}_{IMU}^n + \mathbf{D}_R^{-1} [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \\ &= \mathbf{r}_{GNSS}^n + \mathbf{D}_R^{-1} \delta \mathbf{r}_{IMU}^n + \mathbf{D}_R^{-1} (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi}\end{aligned}\quad (2-81)$$

GNSS 实测的 GNSS 天线相位中心的位置可表示为：

$$\tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^n = \mathbf{r}_{GNSS}^n + \mathbf{D}_R^{-1} \mathbf{e}_r \quad (2-82)$$

式中， $\mathbf{e}_r$  为 GNSS 位置测量误差。基于方程(2.81)和(2.82)，同时考虑  $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\theta}$ ，略去微小量  $\delta\boldsymbol{\theta}$  以及二阶小量，可以得到位置误差量测方程

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z}_r &= \mathbf{D}_R (\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^n - \tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^n) \\ &= [\mathbf{I} - (\delta\boldsymbol{\theta} \times)]^T \delta \mathbf{r}_{IMU}^c + (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) (\boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{e}_r \\ &\approx \delta \mathbf{r}_{IMU}^c + (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\psi} - \mathbf{e}_r\end{aligned}\quad (2-83)$$

当载体跨越  $\lambda = \pm 180^\circ$  子午线时  $\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^n$  和  $\tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^n$  有可能会出现在相同时刻其经度值分别为  $179.999^\circ$  或者  $-179.999^\circ$  的现象，那么此时采用经纬度的形式直接进行  $\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^n - \tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^n$  运算会产生错误。当载体在两极地区时，纬度误差和经度误差会变的比较模糊。因此，更为可靠的位置误差计算过程就是先得到  $e$  系下的位置误差，然后将其转换到  $n$  系，位置观测量的具体求解公式表达为，

$$\delta \mathbf{z}_r = \mathbf{C}_e^n (\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^e - \tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^e) = \mathbf{C}_e^n (\hat{\mathbf{r}}_{IMU}^e - \tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^e) + \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \quad (2-84)$$

### 2.3.4.3 速度观测方程

速度观测值上的杆臂效应为

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{GNSS}^n &= \mathbf{v}_{IMU}^n + \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \mathbf{l}_{GNSS}^b \\
&= \mathbf{v}_{IMU}^n + \mathbf{C}_b^n \left[ (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^b \times) \right] \mathbf{l}_{GNSS}^b \\
&= \mathbf{v}_{IMU}^n - \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{in}^b \times) \mathbf{l}_{GNSS}^b + \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \mathbf{l}_{GNSS}^b \\
&= \mathbf{v}_{IMU}^n - \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{in}^b \times) \mathbf{C}_n^b \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b + \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \mathbf{l}_{GNSS}^b \\
&= \mathbf{v}_{IMU}^n - \left[ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times) + (\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times) \right] \mathbf{C}_n^b \mathbf{l}_{GNSS}^b - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b
\end{aligned} \tag{2-85}$$

由上式可知，由 INS 推算的 GNSS 天线速度可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}}_{GNSS}^n &= \hat{\mathbf{v}}_{IMU}^n - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n \times) \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \\
&\approx \mathbf{v}_{IMU}^n + \delta \mathbf{v}_{IMU}^n + (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b + (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) (\boldsymbol{\phi} \times) \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \\
&\quad - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + (\boldsymbol{\phi} \times) \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
&= \mathbf{v}_{GNSS}^n + \delta \mathbf{v}_{IMU}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b
\end{aligned} \tag{2-86}$$

GNSS 实测的 GNSS 天线速度可表示为

$$\tilde{\mathbf{v}}_{GNSS}^n = \mathbf{v}_{GNSS}^n + \mathbf{e}_v \tag{2-87}$$

式中， $\mathbf{e}_v$  为 GNSS 速度测量误差。基于(2.86)式和(2.87)式，忽略微小量  $\delta \boldsymbol{\theta}$  以及二阶小量，速度误差观测方程：

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{z}_v &= \hat{\mathbf{v}}_{GNSS}^n - \tilde{\mathbf{v}}_{GNSS}^n \\
&\approx \delta \mathbf{v}_{IMU}^c - (\boldsymbol{\omega}_{ic}^c \times) \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi} \\
&\quad - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{e}_v
\end{aligned} \tag{2-88}$$

综合(2.84)和(2.88)即可构建 GNSS/INS 组合导航 Kalman 滤波器的观测方程，如下式，

$$\delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{z}_r \\ \delta \mathbf{z}_v \end{bmatrix} = \mathbf{H} \delta \mathbf{x} + \mathbf{v} \tag{2-89}$$

式中， $\mathbf{H}$  为量测矩阵，其具体元素可由(2.84)和(2.88)获得。 $\mathbf{v}$  为量测噪声向量。

## 2.4 本章小结

本章首先介绍了惯性导航技术原理和算法。简要介绍了常用坐标系及其相互转换关系和 IMU 传感器及其误差组成，推导了导航坐标系下的 INS 机械编排和基于  $\boldsymbol{\psi}$  角误差模型的 INS 误差方程。

其次，介绍了 GNSS/INS 组合导航原理和算法。首先介绍了最优估计算法：Kalman 滤波和固定区间的 RTS 反向平滑。其次，介绍了几种常见的随机过程及其特点，并将一阶高斯-马尔科夫过程应用于 IMU 误差建模。然后，以松组合为例详



细阐述了 GNSS/INS 组合导航算法，包括系统状态方程和观测方程的建立过程。

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

## 第 3 章 杆臂误差影响的定量分析方法

### 3.1 引言

本文第二章介绍了 GNSS/INS 组合导航的基本原理，从组合导航算法可以看出，由于 GNSS 天线与 IMU 测量中心不在同一个物理点上，也即存在杆臂补偿。杆臂误差如何影响 GNSS/INS 最终的导航精度以及如何对其影响进行定量分析是本章的研究内容。本章首先介绍导航误差的定量分析方法，也即如何定量评估导航误差的方法。然后介绍本文所用的 GNSS/INS 组合导航仿真方法及具体预设条件。

### 3.2 导航误差定量分析方法

GNSS/INS 组合导航系统性能分析可以综合采用 GNSS 和 INS 精度评定方法。在分析 GNSS/INS 组合导航产品性能时可以用一套高精度 GNSS/INS 组合系统为被测系统提供“参考真值”以计算导航误差，采用传统的数理统计方法对获取的导航误差时间序列进行整体绝对精度的评定。也可以结合 GNSS/INS 组合导航产品在移动测图中提供直接地理参考的具体作用，将已知地面控制点作为参考值，同样采用传统数理统计方法对导航误差的绝对精度进行评定。

上述两种方法均需要高精度的参考真值，但是高精度的参考真值并不容易获取或者说获取的代价很大。因此，本文采用数据仿真的方法进行杆臂误差影响的定量分析研究工作。仿真分析能够为 GNSS/INS 组合导航提供可靠的参考真值，从而可以得到导航结果的误差序列，进而对导航误差进行定量分析和研究。在仿真数据的基础上人为设定 GNSS 信号中断，考察 GNSS 信号中断下 INS 位置漂移误差的统计值被作为 GNSS/INS 组合导航系统性能的评价方法。

#### 3.2.1 导航误差分析方法

GNSS 信号中断可以看作是 GNSS/INS 组合导航系统遇到的最差情况，因为此时惯性导航系统丧失了重要的外界辅助信息，系统将做纯惯导解算，其定位、定姿误差将随时间呈指数级增长。因此，人为地仿真 GNSS 信号中断，可以有效的考察惯导的性能，评估 GNSS/INS 系统在最差情况下能达到的定位、定姿精度。

##### 3.2.1.1 GNSS 信号中断仿真

本文也将在仿真数据的基础上人为设定 GNSS 信号中断，考察 GNSS 信号中断下

INS 位置漂移误差的统计值被作为 GNSS/INS 组合导航系统性能的评价方法，如图 3-1 所示。取每个 GNSS 信号中断期间位置和姿态误差绝对值的最大值，作为该时段内的位置和姿态漂移量，然后对所有 GNSS 信号中断期间的历史和姿态漂移量进行统计分析。

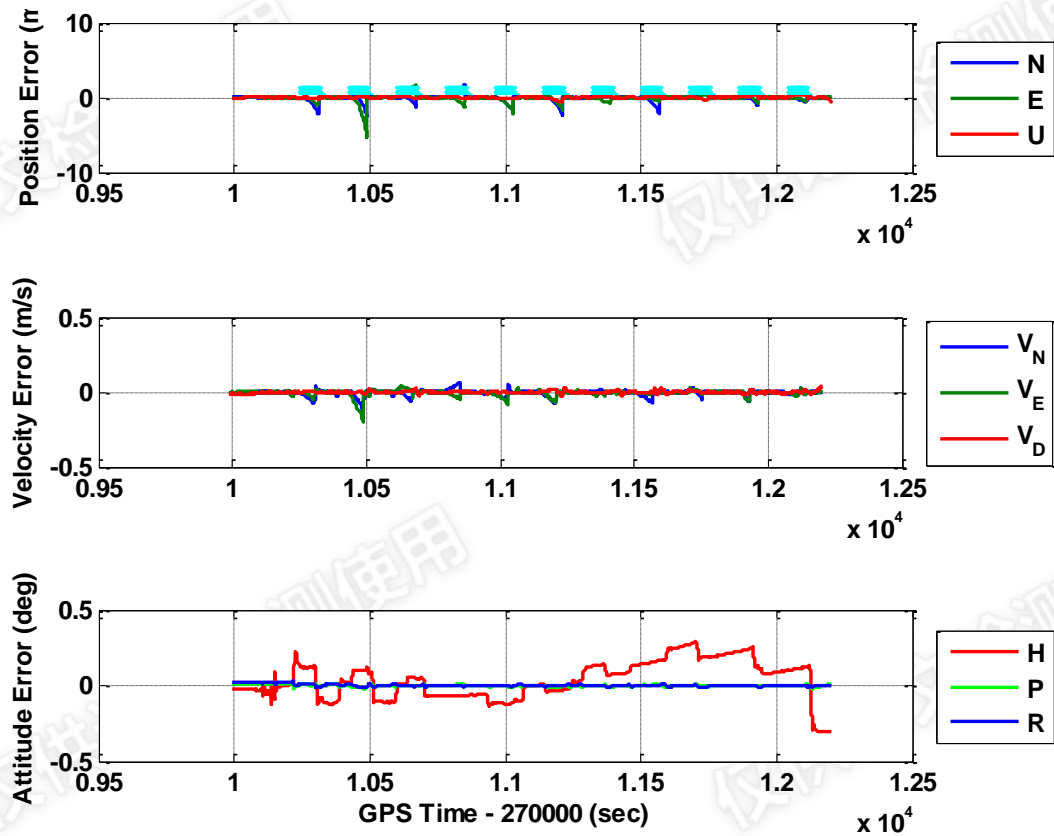


图 3-1 某典型战术级惯导在 GNSS 中断情况下导航结果的发散

### 3.2.1.2 GNSS 中断时段的选取

GNSS 中断均设置在载体刚完成机动（例如拐弯）之后，因为此时杆臂误差的干扰作用表现得最突出。具体的时段选取如图 4-6 所示。

GNSS 中断时长的选取则主要根据不同的惯导等级进行设置，例如中高精度系统（如 POS830，SPAN-FSAS）则主要考察 60 秒内的导航误差漂移，而 MEMS 惯导则考察 30 秒内的导航误差漂移，因为对于 MEMS 惯导来说，60 秒的中断过程中惯性器件误差将起主导作用，其引起的导航误差将远大于杆臂误差的影响。

## 3.2.2 GNSS/INS 组合导航仿真器

如前所述，采用仿真分析的方法具有诸多优点。1) 可以有针对性的加入某项误差，例如 IMU 传感器误差的一阶高斯马尔科夫过程和白噪声、GNSS 误差模型等；2) 仿真数据考察能够剔除干扰因素获得干净的定量结果和结论；3) 能够提供准确的导航信息真值，如位置、速度和姿态的参考真值，有能力评估高精度系统（如导

航级惯导)的导航误差;4)零成本、方便快捷地设定特定的场景,设置不同的所需的动态条件,这是实测数据难以做到的。

本文采用武汉大学卫星导航定位技术研究中心开发的GNSS/INS组合导航仿真器获取仿真数据。该仿真器能够根据设定好的运动轨迹、IMU误差参数、GNSS误差参数等参数,生成对应轨迹的IMU原始数据(加速度计和陀螺的原始测量数据)及GPS定位结果文件。同时可以输出对应的导航真值文件。接下来可以使用IMU及GPS文件进行解算,并将结果和导航真值进行比较,得到实际系统的导航误差。组合导航仿真及解算流程见图1,虚线框内部为仿真器部分。其中红色框为仿真器设定部分,黄色和蓝色框内为仿真器输出部分。

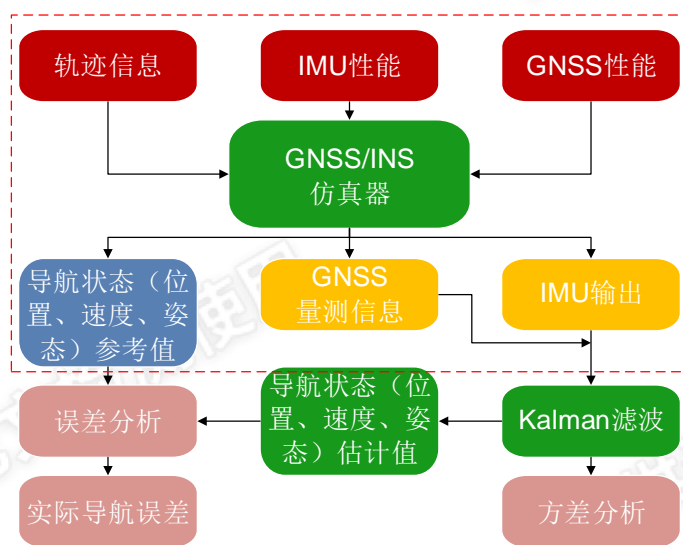


图 3-2 GNSS/INS 组合导航仿真及解算流程

仿真器底层根据人为设定的初始导航信息(位置、速度、姿态等),结合根据所设定轨迹生成的角速度和加速度真值信息,使用惯性导航机械编排算法不断向前推算以后各时刻的导航真值。分别在各个层面的真值信息上加上误差,即可得到所需的实际导航信息。例如:

- 角速度真值 + 角速度误差 → 陀螺输出;
- 加速度真值 + 加速度误差 → 加速度计输出;
- 位置真值 + GPS 位置误差 → GPS 位置输出;
- 速度真值 + GPS 速度误差 → GPS 速度输出;

### 3.2.2.1 仿真器内部坐标系定义

#### (1) n 系(导航坐标系)

用于底层的真值推算。在该坐标系下进行机械编排推算。

#### (2) v 系(载体坐标系):

用于底层的真值推算。使用该系,不断推算出载体姿态真值;这里的 V 系轴线

是载体轴线，原点在 IMU 中心。

### (3) b 系 (IMU 坐标系)

用于生成 IMU 输出文件。每个 IMU 对应的 b 系通过各自的  $C_{nb}$  和 n 系转化。 $C_{nb}$  作为初值设定。整个导航过程中，因为 IMU 与载体固连，所以  $C_{nb}$  保持不变（当然，若要加入旋转调制功能，则产生按一定函数变化的  $C_{nb}$ ，该版本未加）。

### (4) e 系 (地球坐标系)

经纬高坐标系。

#### 3.2.2.2 仿真器功能

- 1) 自由拼接简单运动构成整个运动过程轨迹：匀速或静止；匀变速直线运动；加速度线性变化；加速度正弦交变直线运动；匀角速度转弯；角速度线性变化；角速度正弦交变等。
- 2) 输出导航信息（位置、速度、姿态、角速度、加速度等）的真值；
- 3) 可随意设定 IMU 误差（零偏、比例因子误差、交轴耦合、噪声）信息及 GPS 位置、速度误差信息，生成 AINS 格式的 IMU 输出文件，以及 GPS 输出文件；
- 4) 可添加 IMU 安装角误差、GPS 杆臂在 V 系的投影（这里设定的杆臂是在 V 系相对 IMU 中心的）、周期性振动；
- 5) 可同时仿真小杆臂（小于 3 m）情况下的多个 IMU 及多个 GPS 信息；
- 6) 仿真器底层使用 INS 机械编排算法推算，经过测试，误差可以略。（当多个 IMU 时，若 IMU 相对仿真计算原点的杆臂较大时，则产生的 IMU 输出会有一些误差，小杆臂情况下可接受）。

#### 3.2.2.3 轨迹设置说明

整个导航过程的轨迹是由多个轨迹段拼接而成。每个轨迹段由轨迹矩阵（8 列）的一行设定。轨迹矩阵的第一列代表所在行设置的轨迹类型。对应了选定轨迹类型，该行的其余参数将按照该轨迹类型特定的参数设定方式设定该轨迹参数，如表 3-1 所示。运动类型定义如下：

- ◇ 1 – 静止或匀速直线运动；
- ◇ 2 – 匀加速直线运动；
- ◇ 3 – 指定时间内加速到指定速度，整个过程加速度呈梯形；
- ◇ 4 – 转弯。指定时间内转弯指定角度，整个过程角速度呈梯形变化；
- ◇ 5 – 加速度正弦交变的直线运动；
- ◇ 6 – 角速度正弦交变；
- ◇ 61 – 角速度余弦交变；

- ◇ 7- 匀速圆周运动;
- ◇ 8- 角速度从某个值线性变化到另一个值。常用来做过渡段。
- ◇ 9- 加速度从某个值线性变化到另一个值，即加速度线性变化的直线运动。

表 3-1 GNSS/INS 组合导航仿真器轨迹设置说明

第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列	第 6 列	第 7 列
1	时间长度 (s)	0	0	0	0	0
2	时间长度 (s)	加速度 (m/s <sup>2</sup> )	变速轴线(1,2,3 - x,y,z)	0	0	0
3	时间长度 (s)	加速度到速度 (m/s)	变速轴线 (1,2,3)	0	0	0
4	时间长度 (s)	当前线速度 (m/s)	向心加速度轴线 (含方向) (1,2,3,-1,-2,-3) <sup>1</sup>	0	旋转总角度 (deg)	旋转轴线 (1,2,3)
5	时间长度 (s)	加速度幅值 (m/s <sup>2</sup> )	变速轴线 (1,2,3)	加速度变化周期 (s)	0	0
6	时间长度 (s)	当前线速度 (m/s)	向心加速度轴线 (含方向)	角速度正弦变化周期 (s)	角速度幅值 (deg/s)	旋转轴线 (1,2,3)
6	时间长度 (s)	当前线速度 (m/s)	向心加速度轴线 (含方向)	角速度余弦变化周期 (s)	角速度幅值 (deg/s)	旋转轴线
7	时间长度 (s)	当前线速度 (m/s)	向心加速度轴线 (含方向)	0	角速度大小 (deg/s)	旋转轴线
8	时间长度 (s)	当前线速度 (m/s)	向心加速度轴线 (含方向)	角速度起点 (deg/s)	角速度终点 (deg/s)	旋转轴线
9	时间长度 (s)	0	变速轴线	加速度起点 (deg/s)	加速度终点 (deg/s)	0

### 3.3 仿真条件设置

#### 3.3.1 仿真轨迹

为充分表现出杆臂误差对最终的 GNSS/INS 组合导航误差的影响，仿真的轨迹设计为斜“8”字形，如图 3-3 所示，以保证惯性导航系统能够经历足够丰富的动态条件，将 GNSS/INS 组合导航的各项误差充分地表现出来。具体的轨迹仿真说明见表 3-2。后续的所有场景的数据均是基于该轨迹生成得到的。

表 3-2 仿真轨迹说明

1	10	0	0	0	0	0	静止 300s
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒

3	20	0	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 0
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
3	20	0	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 0
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
1	60	0	0	0	0	0	匀速直线运动 60 秒
3	20	2	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 2 米每秒
1	60	0	0	0	0	0	匀速直线运动 60 秒
4	10	2	2	0	90	3	
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
3	20	0	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 0
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
3	20	0	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 0
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
1	60	0	0	0	0	0	匀速直线运动 60 秒
3	20	2	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 2 米每秒
1	60	0	0	0	0	0	匀速直线运动 60 秒
4	10	2	2	0	90	3	
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
3	20	0	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 0
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
3	20	0	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 0
3	20	40	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内加速到 40 米每秒
1	60	0	0	0	0	0	匀速直线运动 60 秒
3	20	2	1	0	0	0	沿 X 轴 20 秒内减速到 2 米每秒
1	60	0	0	0	0	0	匀速直线运动 60 秒

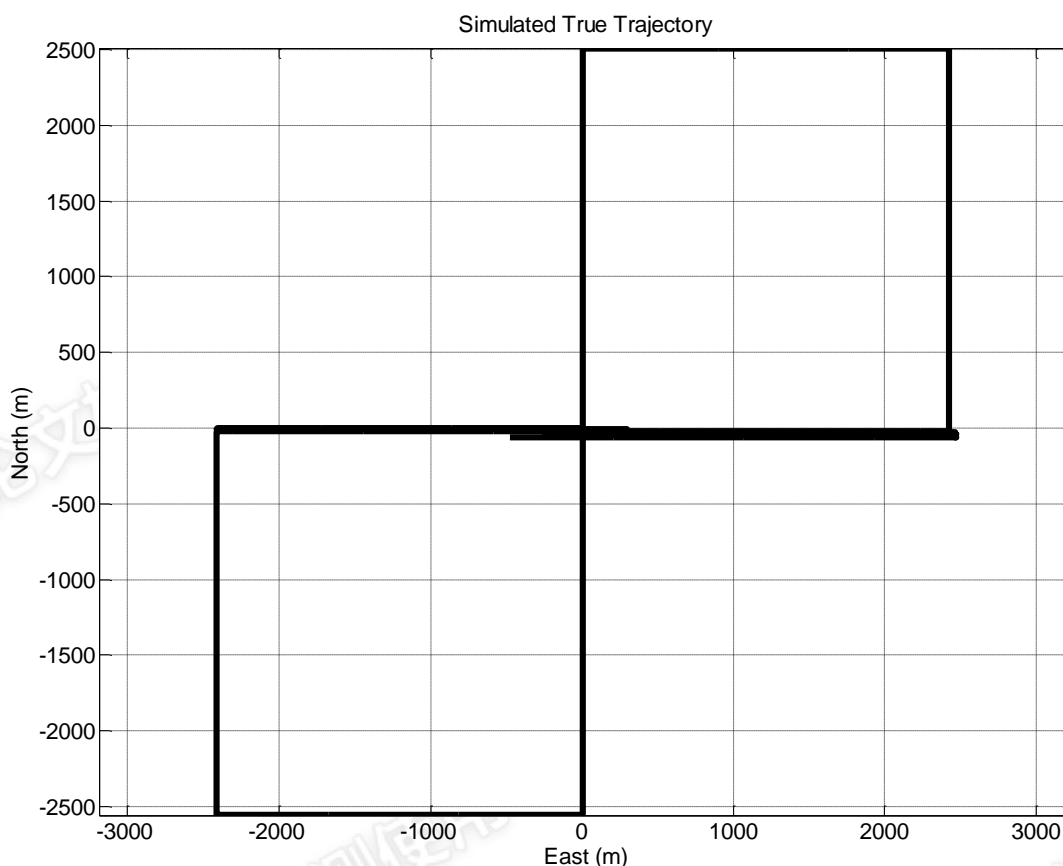


图 3-3 仿真轨迹图 (平面投影)

### 3.3.2 预设条件

#### 3.3.2.1 惯导误差主要类型

如第二章中所述, IMU 输出信息中包含多种误差类型。表 4-2 给出了几个常见且相对重要的 IMU 误差参数及其对 INS 导航误差的影响。其中, 陀螺和加速度计的零偏和白噪声 (即高频随机噪声) 对短期精度影响较为显著; 陀螺和加速度计的比例因子对组合导航精度的影响主要取决于载体动态情况。

表 3.3 IMU 参数及其对 INS 导航误差的影响

	IMU 参数	对 INS 导航误差的影响
陀螺	零偏	长期影响和短期影响均比较显著
	比例因子	取决于载体动态情况
	白噪声	短期影响较为显著
加速度计	零偏	短期影响显著
	比例因子	取决于载体动态情况
	白噪声	长期影响和短期影响

陀螺零偏对位置误差的影响相对较大, 根据单通道误差传播推导方程可知, 如果 INS 系统工作时间非常短, 水平方向陀螺零偏误差  $b_{\omega}$  将会产生一个随时间发散的角



度误差  $\delta\theta$ ，其简化表达式为，

$$\delta\theta = \int b_{\omega} dt = b_{\omega} \cdot t \quad (3-1)$$

上式中角度误差  $\delta\theta$  的存在会产生 IMU 安装角误差，导致加速度信息以错误的角度进行投影，从而产生随时间发散的加速度信息，那么陀螺零偏误差  $b_{\omega}$  对位置误差  $\delta r$  的影响即为，

$$\delta r = \int v dt = \int \frac{1}{2} b_{\omega} \cdot g t^2 dt = \frac{1}{6} b_{\omega} \cdot g t^3 \quad (3-2)$$

同样地，单通道且短时间情况下，加速度计零偏  $b_f$  对位置误差  $\delta r$  的影响为，

$$\delta r = \int v dt = \int b_f \cdot t dt = \frac{1}{2} b_f \cdot t^2 \quad (3-3)$$

陀螺量测信息中的白噪声（实际中为有限带宽噪声）经离散积分后会产生角度误差，两者标准差之间的关系可由如下解析方式来表示，

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varepsilon_{\omega}} \sqrt{T_s t} \quad (3-4)$$

式中， $\sigma_{\varepsilon_{\omega}}$  为陀螺量测信息中白噪声的标准差。 $\sigma_{\theta}$  为白噪声积分产生的角度误差的标准差。 $T_s = \frac{1}{f_s}$ ， $f_s$  为采样频率。

同样地，加速度计量测信息中的白噪声经离散积分后也会产生速度误差和位置误差，其标准差之间的解析表达式为

$$\sigma_v = \sigma_{\varepsilon_f} \sqrt{T_s t} \quad (3-5)$$

$$\sigma_r = \sigma_{\varepsilon_f} \sqrt{\frac{1}{3} T_s t^3} \quad (3-6)$$

式中， $\sigma_{\varepsilon_f}$  为加速度计量测信息中白噪声的标准差。 $\sigma_v$  和  $\sigma_r$  分别为白噪声一次积分和二次积分产生的速度误差标准差和位置误差标准差。

本文在仿真 GNSS/INS 组合导航数据中，对于惯性期间误差主要关注的是陀螺和加速度计的零偏和比例因子的误差建模，没有考虑比例因子误差。

### 3.3.2.2 惯导等级

为定量分析杆臂误差对不同精度等级 GNSS/INS 组合导航精度的影响，本文仿真了三个不同等级的惯性导航系统的原始数据，并进行后续的解算和分析。包括，典型导航级激光陀螺组合导航系统 POS830，典型战术级光纤陀螺组合导航系统 NovAtel SPAN-FSAS，典型 MEMS 微型惯性测量系统为 Xsens Technologies 公司制造 MTi-G。下面对着三款组合导航系统的主要性能指标进行简要说明。

#### ● POS830

POS830: MP-POS830 采用高精度小型环形激光陀螺 (RLG) 和高稳定性石英加速度计，与专业测量型 GNSS 板卡组合，经专门设计的 GNSS/INS 数据融合软件处

理, 可提供精确的定位信息 (经度、纬度和高度), 定姿信息 (俯仰、横滚和航向), 以及三维加速度、角速度等动态信息, 是一款高精度 (导航级) 定位定姿系统。可广泛用于航空摄影测量、航空重力测量、陆地交通道路测量、海上定位等领域。

惯性测量单元 (IMU) 由 3 个单轴 50 型环形机抖激光陀螺仪、3 个高精度石英挠性加速度计、减振器以及安装机械构件组成; MP-POS830 所使用的陀螺仪为中高精度 50 型环形机抖激光陀螺仪, 其逐次上电零偏重复性优于 0.01 deg/hr, 单次上电零偏稳定性优于 0.01 deg/hr。加速度计为高稳定性石英加速度计, 逐次上电零偏重复性优于 8 mGal, 单次上电零偏稳定性优于 10 mGal

表 3-4 MP-POS830 主要性能指标参数

工作性能	定位精度	$\leq 0.05 \text{ m (1 } \sigma)$
	航向精度	$\leq 0.005 \text{ deg (1 } \sigma)$
	姿态精度	$\leq 0.003 \text{ deg (1 } \sigma)$
	纯惯性位置精度	1.0~3.5 nm/h
	纯惯性速度精度	0.05~2.0 m/s
	纯惯性姿态角	$\leq 0.05 \text{ deg (1 } \sigma)$
	纯惯性航向角	$\leq 0.07 \text{ deg (1 } \sigma)$
陀螺仪	零偏	$\leq 0.01 \text{ deg/h}$
	零偏稳定性	$\leq 0.01 \text{ deg/h}$
	零偏重复性 (逐次上电)	$\leq 0.01 \text{ deg/h}$
	非线性	$\leq 10 \text{ ppm}$
加速度计	零偏	$\leq 25 \text{ mGal}$
	零偏稳定性	$\leq 10 \text{ mGal}$
	零偏重复性 (逐次上电)	$\leq 8 \text{ mGal}$
	非线性	$\leq 10 \text{ ppm}$
物理特性	尺寸	190 × 190 × 183 mm
	重量	$\leq 8.5 \text{ kg}$

## ● SPAN-FSAS

SPAN-FSAS 组合导航系统是 NovAtel 公司生产的一款典型的战术级 GNSS/INS 组合导航系统。其惯性测量单元 (IMU) 是 IMAR GmbH 公司生产的一款战术级惯导 IMU-FSAS。配合使用 NovAtel 公司的 SPAN-SE 或 ProPak 接收机组成分体式的组合导航系统, 该系统常用于车载移动测图等应用中。

因此本文仿真的战术级惯性导航系统参数均参考 IMU-FSAS 系统。

表 3-5 IMU-FSAS 主要性能指标参数

陀螺仪	Gyro Input Range	$\pm 450 \text{ deg/sec}$
-----	------------------	---------------------------

	Gyro Rate Bias	< 0.75 deg/hr
	Gyro Rate Scale Factor	300 ppm
	Angular Random Walk	0.1 deg/sqrt(hr)
加速度计	Accelerometer Range	± 5g
	Accelerometer Bias	1.0 mg
	Accelerometer Scale Factor	300 ppm

● MTi-G

MTi-G 是由 Xsens Technology 公司生产的 GPS/INS 组合导航系统, 内置了导航和姿态航向参考系统 (AHRS) 处理器。MTi-G 集成了 MEMS 惯性传感器 (加速度计和陀螺) 和微型 GPS 接收机, 同时集成了多种其它辅助传感器, 如三轴磁强计和气压高程计。

本文所仿真的 MEMS 组合导航系统的参数, 均以 MTi-G 为参考进行设置。

3.3.2.3 GNSS 定位误差

在大多数 GNSS/INS 组合导航算法研究及应用中, 往往将 GNSS 辅助信息的误差模型简化为白噪声<sup>[2]</sup>。但是<sup>[49]</sup>的研究结果表明, GNSS (尤其是高频 GNSS, 例如采样率大于等于 1 Hz) 定位结果的历元间存在较强的相关性。如果在 GNSS/INS 组合导航算法设计中, 将 GNSS 定位误差建模为白噪声, 将严重降低 GNSS 对组合导航结果相对精度的贡献。文中用 Allan<sup>[50]</sup>方差分析方法精确识别出了 GNSS 导航定位误差的随机模型, 并给出了相应的误差参数, 如图 3-4 所示。

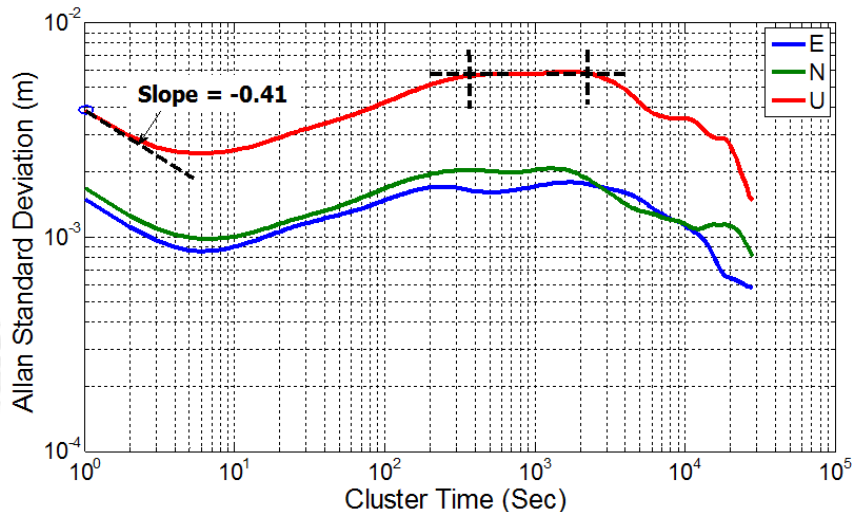


图 3-4 1 Hz PPK 定位误差的 Allan 标准差曲线: 可见 GNSS 平面位置相对误差不大于 2 mm, 高程方向不大于 4 mm, 均远小于 GNSS 绝对位置误差 (厘米级)。表明 GNSS 定位误差存在极强的时间相关性

本文仿真的 GNSS 定位结果误差建模为一阶高斯马尔科夫过程和白噪声叠加而成的随机过程, 其中一阶高斯马尔科夫过程的两个参数为均方值和相关时间, 白噪

声的参数为方差强度（或功率谱密度）。

对于不同的 GNSS 定位模式，如基于载波相位的差分定位后处理（PPK），精密单点定位（PPP）和普通单点定位（SPP），其定位精度不一样，表现出来的定位误差模型也不一样。本文主要关注 PPK 和 SPP 两类应用，其中模拟 PPK 的噪声随机过程参数如表 3-6 所示，模拟 SPP 的噪声随机过程参数如 3-7 所示：

表 3-6 高精度 GNSS 定位（PPK）噪声建模及其参数

方向	一阶高斯马尔科夫过程		白噪声
	相关时间 T(s)	均方根(mm)	N( m/sqrt(Hz) )
E	600	3.0	1.5
N	600	3.0	1.7
U	600	9.0	3.9



图 3-5 1 Hz SPP 定位误差的 Allan 标准差曲线，从图中可以看出 GNSS 定位误差存在极强的时间相关性

表 3-3 SPP 定位噪声建模及其参数

方向	一阶高斯马尔科夫过程		白噪声
	相关时间 T(s)	均方根 (m)	N ( m/sqrt(Hz) )
E	4150	1.68	0.56
N	4150	3.80	0.64
U	2780	8.54	1.44

### 3.3.2.4 杆臂误差的轴向

为了分析杆臂误差的轴向设置是否影响最终的 GNSS/INS 导航精度，本文将在不同的轴向上设置不同的杆臂误差值，用于评估各类情况下的导航误差。由于惯性导航的高程通道相对比较独立，即垂向的杆臂误差则主要直接影响高程误差。因此，

本文只仿真了杆臂误差的水平方向分量。

文章将考察如果设置以下几类不同的杆臂误差时，定量分析 GNSS/INS 组合导航误差。

- 针对 RTK 的应用场景

$X = 0, \pm 10\text{cm}, \pm 5\text{cm}, \pm 1\text{cm}$

$Y = 0, \pm 10\text{cm}, \pm 5\text{cm}, \pm 1\text{cm}$

- 针对 SPP 应用场景

$X = 0, \pm 10\text{cm}, \pm 50\text{cm}, \pm 100\text{cm}$

$Y = 0, \pm 10\text{cm}, \pm 50\text{cm}, \pm 100\text{cm}$

### 3.3.2.5 几种典型场景

针对不同的应用场景，杆臂误差对最终的 GNSS/INS 组合导航精度的影响也不尽相同。不同的 GNSS 解算模式得到的 GNSS 位置精度也不一样，一般来说短基线载波相位差分后处理（PPK）能够实现厘米级的定位精度。而普通单点定位的精度一般是几米。

本文利用 GNSS/INS 组合导航仿真器仿真 GNSS 定位结果（作为辅助信息与 INS 进行融合解算）时，加入不同等级的噪声用以模拟不同的应用场景。其中 GNSS 则主要分为两类：一类加入厘米级的定位误差用于模拟短基线 PPK 定位（简称为 RTK）；另一类则加上米级的定位误差用于模拟单点定位模式也即 SPP。结合前面所述的模拟三类不同精度等级的惯性导航系统，进行组合则可以模拟六种不同的应用场景。如下：

- 1) SPP + MEMS (MTi-G) 用于模拟普通车载导航应用场景；
- 2) RTK + MEMS (MTi-G) 用于模拟车载精密导航应用；
- 3) SPP + FSAS (FOG) 用于模拟普通车载测绘定位定姿应用
- 4) RTK + FSAS (FOG) 用于模拟普通车载测绘定位定姿应用
- 5) SPP + POS830 (RLG) 用于模拟普通车载测绘定位定姿应用
- 6) RTK + POS830 (RLG) 用于模拟高精度定位定姿参考系统

## 3.4 本章小结

本章介绍了 GNSS/INS 组合导航中杆臂影响的定量分析方法。首先介绍了 GNSS/INS 导航误差的定量分析方法，即通过仿真 GNSS 中断来考察精度的发散情况。然后介绍了本文用到的 GNSS/INS 组合导航仿真器，对仿真器的基本原理、内部坐标系和主要性能进行了阐述。最后介绍了 GNSS/INS 组合导航仿真的预设条件，本文预设了一套典型的车载运动轨迹用于后续的误差定量分析。仿真了三类不同精

度等级的惯性导航系统，覆盖了导航级、典型战术级和 MEMS 级惯导，并对 GNSS 误差进行了精细的建模，以更精确地逼近真实场景。

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

## 第 4 章 实验及数据分析

### 4.1 引言

上一章详细介绍了 GNSS/INS 组合导航中杆臂影响的定量分析方法。具体给出了数据仿真的方法和策略，并预设了仿真的条件，考虑了不同等级的惯性导航系统和 GNSS 定位模式，组合选取了六类典型的应用场景进行数据仿真，以逼近真实场景。本章对上述不同场景的仿真数据进行处理，定量分析不同场景下的导航误差。

### 4.2 数据处理方案

针对上述不同场景下的仿真数据的主要处理流程如下：1) 进行 GNSS/INS 组合解算；2) 求取 GNSS 中断时段内的导航误差漂移，并做统计分析。下面将分别对这两大步骤设计的数据处理方法进行详细介绍。

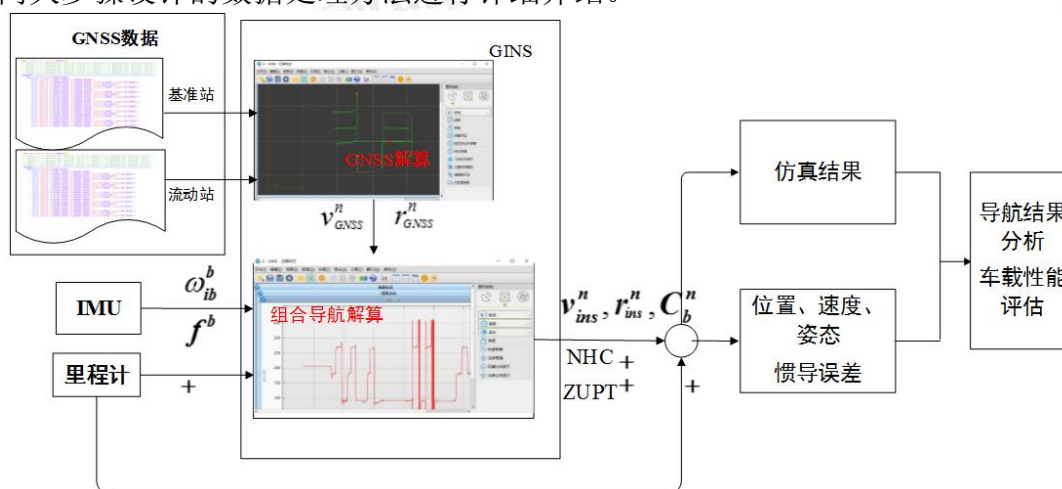


图 4-1 GNSS/INS 组合导航数据处理流程

#### 4.2.1 GNSS/INS 组合导航数据处理软件

GNSS/INS 组合处理采用武汉迈普时空导航公司自主开发研制的高精度组合导航数据处理软件 GINS，如图 4-1 所示。该软件可实现 WGS-84 直角坐标系、大地坐标系、导航坐标系等坐标的转换，利用等效旋转矢量进姿态更新，其卡尔曼滤波器是基于 21 维状态向量对 GNSS 和 INS 数据进行融合。目前该软件支持 SPP、PPP、PPK 三种 GNSS 解算，支持松组合、紧组合的组合导航解算，各模块经过大量测试已基本成熟。该软件具有如下特点：

- (1) 支持 GPS/北斗或两者组合的 PPK 计算；
- (2) 自动扫描原始观测数据，进行数据智能判断，如检查数据长度、数据是否丢数等；
- (3) 支持几种典型的 IMU（包括导航级、战术级和 MEMS 等）精度指标参数自动设定；
- (4) 具有多种初始对准模式，用户可根据自身测试条件适当地进行初始对准，同时具有自动模式；
- (5) 采用扩展卡尔曼滤波（EKF）进行多信息数据融合；
- (6) 支持里程计辅助、非完整性约束（NHC）、零速修正（ZUPT）等多信息辅助；
- (7) 具有 RTS 反向平滑功能；
- (8) 可设置 GNSS 中断仿真，能在任意时刻设置任意时长的 GNSS-outage，模拟城市环境下的组合导航解算；
- (9) 支持 INS 独立解算；

#### 4.2.1.1 GNSS PPK 解算功能

GNSS-PPK 解算是将基准站和流动站的 GNSS 观测数据列成双差方程，解算 WGS-84 坐标下的基线向量，再由基准站的精确已知坐标加上基线向量，得到流动站的高精度坐标值。GNSS-PPK 解算流程如下：

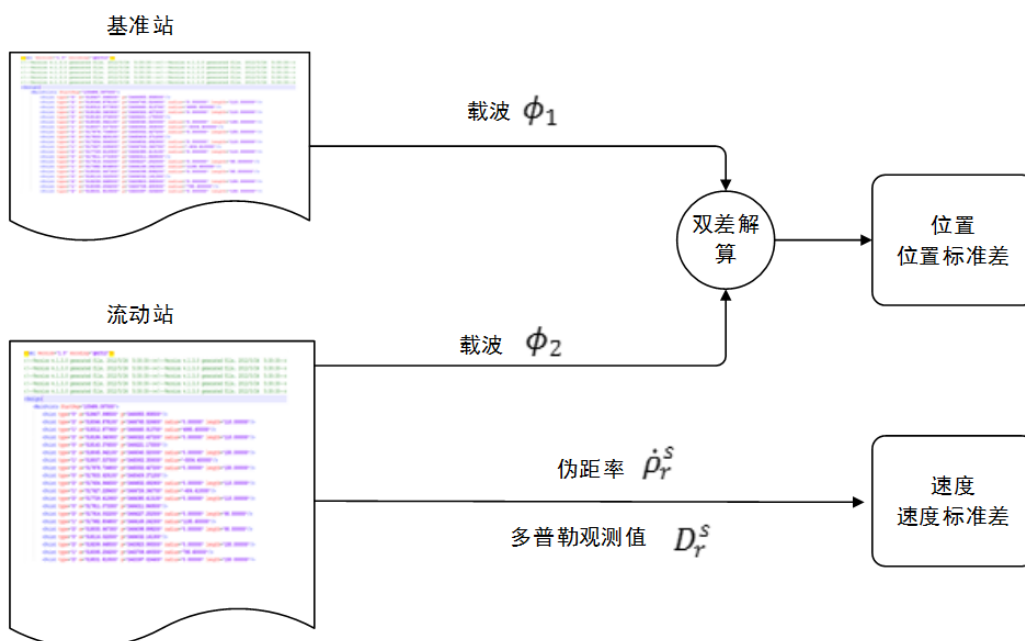


图 4-2 GNSS PPK 处理过程

GNSS 除了能解算流动站的位置并转换至导航坐标系下，还可用伪距率-多普勒方法解算其速度。PPK 解算得到的位置、速度及位置和速度的标准差，将用于 GNSS/INS



松组合解算。GINS-PPK 解算界面如下：

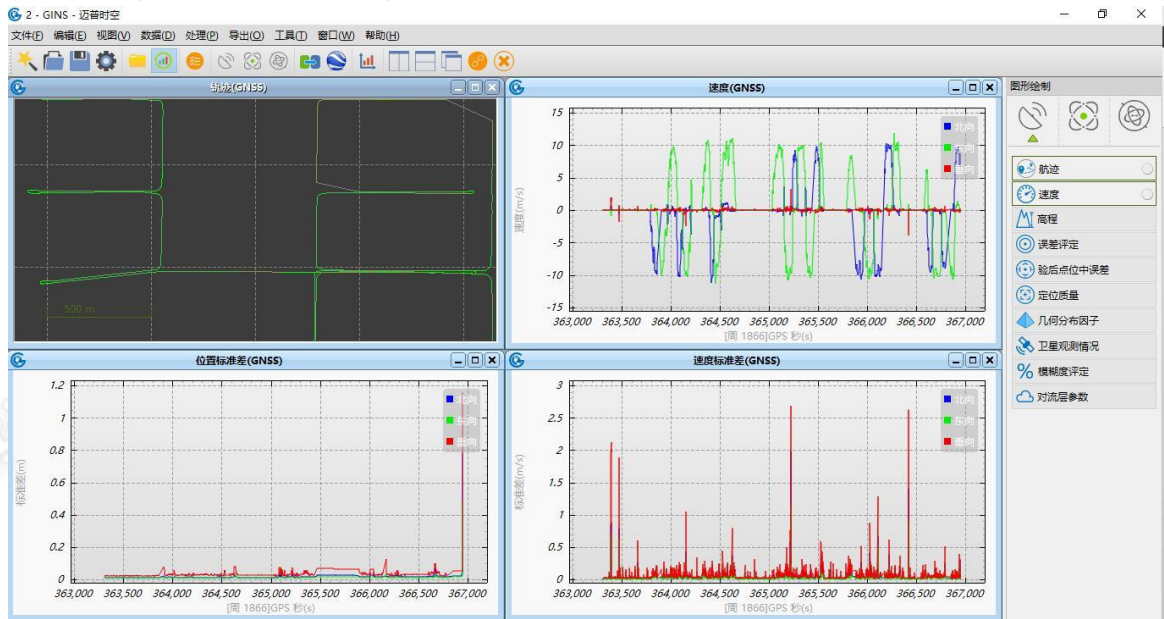


图 4-3 INS-PPK 处理界面

#### 4.2.1.2 GNSS/INS 松组合

PPK 解算完成之后，GINS 松组合模块可自动调用该结果，通过卡尔曼滤波将其与 IMU 观测数据、里程计数据进行融合，算出载体的位置、速度、姿态等导航结果估计陀螺零偏、加速度计零偏等惯导误差。GINS-松组合解算过程如下：

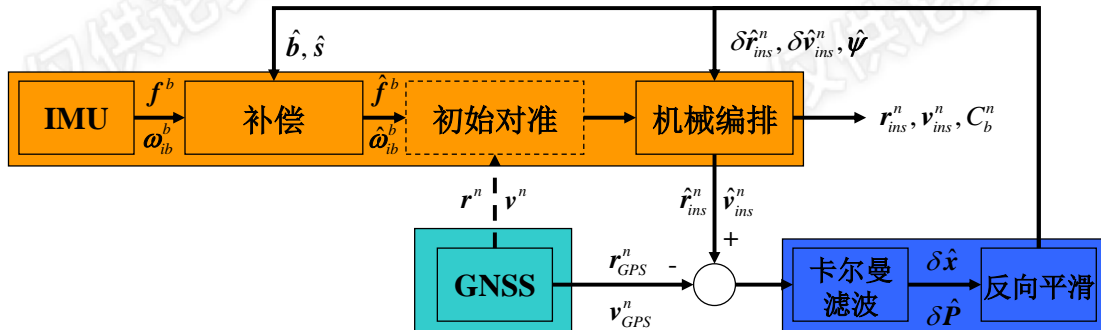


图 4-4 GINS GNSS/INS 松组合处理原理示意图

GINS-松组合解算界面如下：

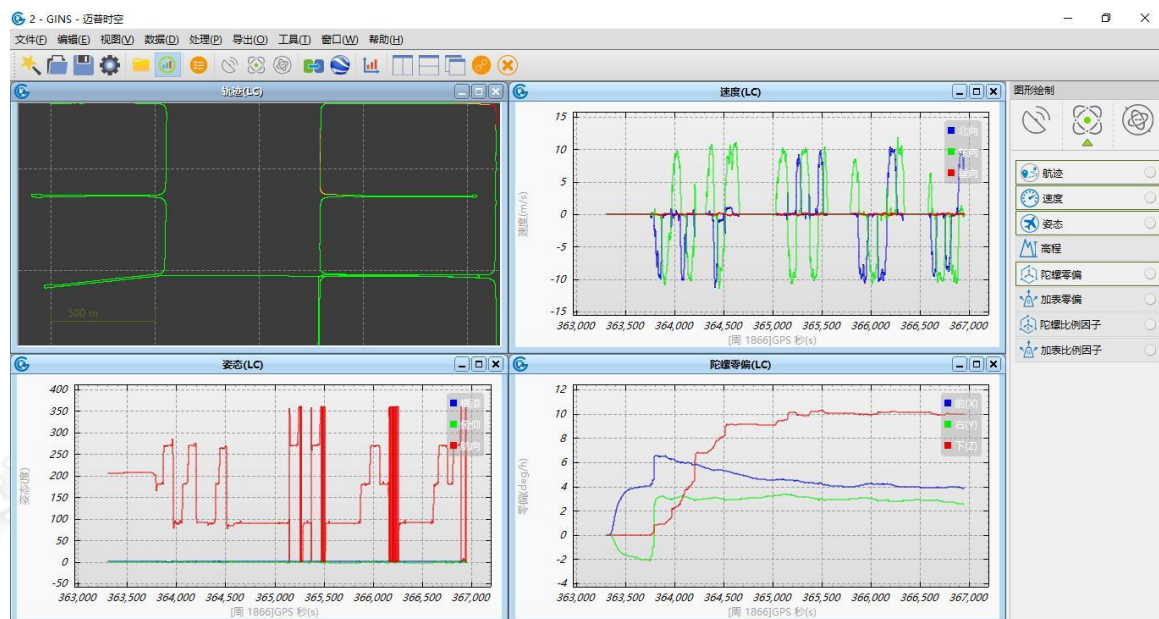


图 4-5 GINS-松组合处理界面

## 4.2.2 导航误差分析

利用 GINS 软件进行 GNSS/INS 组合导航解算，得到的 IMU 测量中心在地心地固坐标系下的三维位置坐标，及大地坐标（纬度、经度和大地高）、速度和姿态。为了更好地评估其位置精度，尤其是在 GNSS 中断时间范围内的误差漂移情况。因此，导航误差分析的数据处理的主要步骤如下：

- 1) 将 GNSS/INS 的大地坐标与参考真值一起采用统一高斯投影方式进行投影，得到平面坐标和大地高。
- 2) 将解算的 GNSS/INS 组合导航结果，包括位置、速度和姿态，与参考真值进行相减，得到全时段各类误差时间序列；
- 3) 提取出各 GNSS 中断时段内的各类导航误差，并提取各时段内给累误差的最大值；
- 4) 对 N 个 GNSS 中断时段内的导航误差最大值进行统计分析，求取误差序列的均值、RMS 和最大值。

## 4.3 数据分析

下面将处理和分析 3.3.2 节所述的六类场景数据。由于数据处理方式和结果分析思路具有高度的相似性，文章将以 RTK+FSAS 这一场景为例进行详细的分析说明，其它各类场景的数据则简要呈现最终的结果，直接给出结论。

### 4.3.1 RTK + SPAN-FSAS

RTK+FSAS 主要是模拟短基线 PPK 结果与 FSAS 惯性导航系统进行组合导航解算的场景。针对这一应用场景，本文分别考察设置不同杆臂误差时的 GNSS/INS 组合导航误差的统计水平。仿真的轨迹以及 GNSS 中断时段的选取如图 4-6 所示。由于 RTK 的误差水平一般为厘米级，那么根据我们设置的一阶高斯马尔科夫过程和白噪声参数，得到的 GNSS 位置误差如图 4-7 所示。

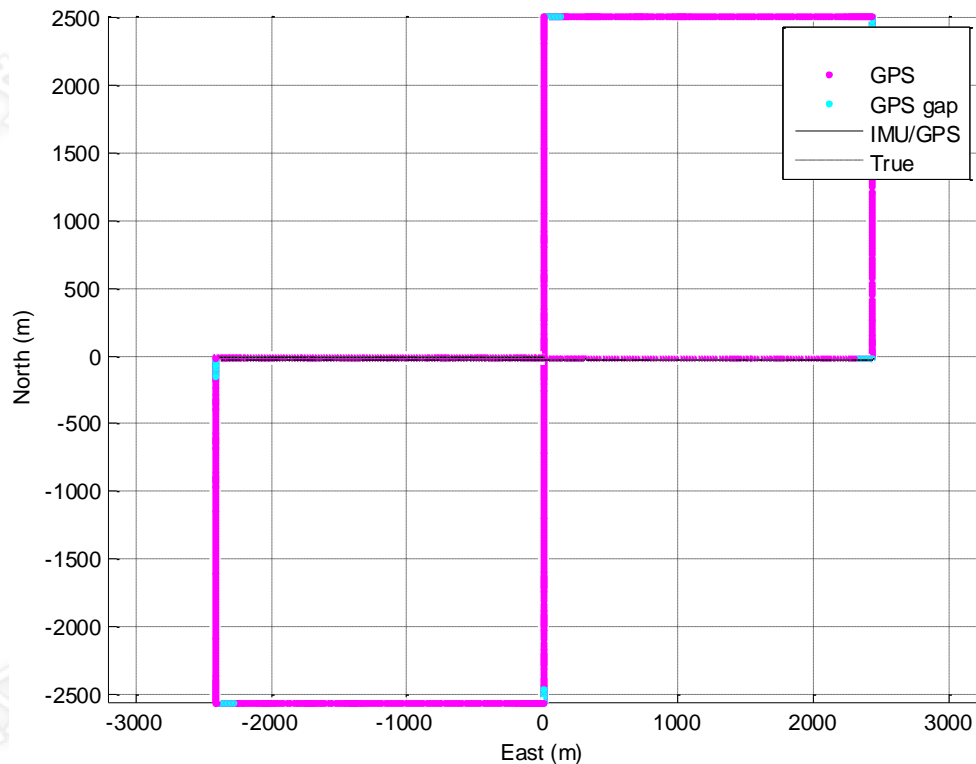


图 4-6 仿真的 SPAN-FSAS 的运动轨迹（平面），在每次拐弯之后马上设置 GNSS 中断

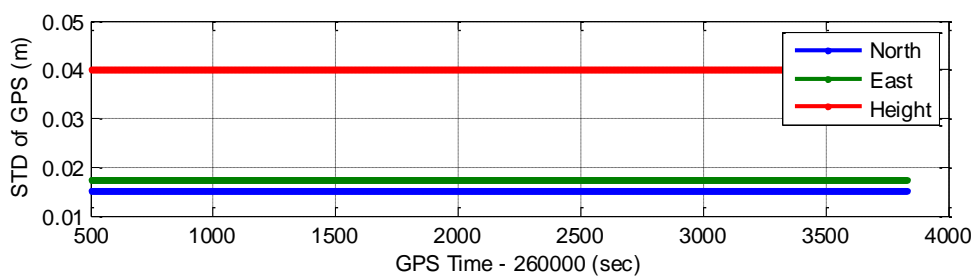


图 4-7 RTK 定位误差（厘米级精度）

下面，将针对不同的杆臂误差情形，定量分析 GNSS/INS 组合导航误差。杆臂误差分别设置为：0，±10cm，±5cm 和 ±1cm。

#### 4.3.1.1 无杆臂误差

在没有设置杆臂误差的情况下，进行组合导航解算，并设置 GNSS 中断，得到的 GNSS/INS 组合导航误差序列，如图 4-8 所示，包括位置、速度和姿态误差。

### GNSS/INS 组合导航系统中杆臂影响的定量分析

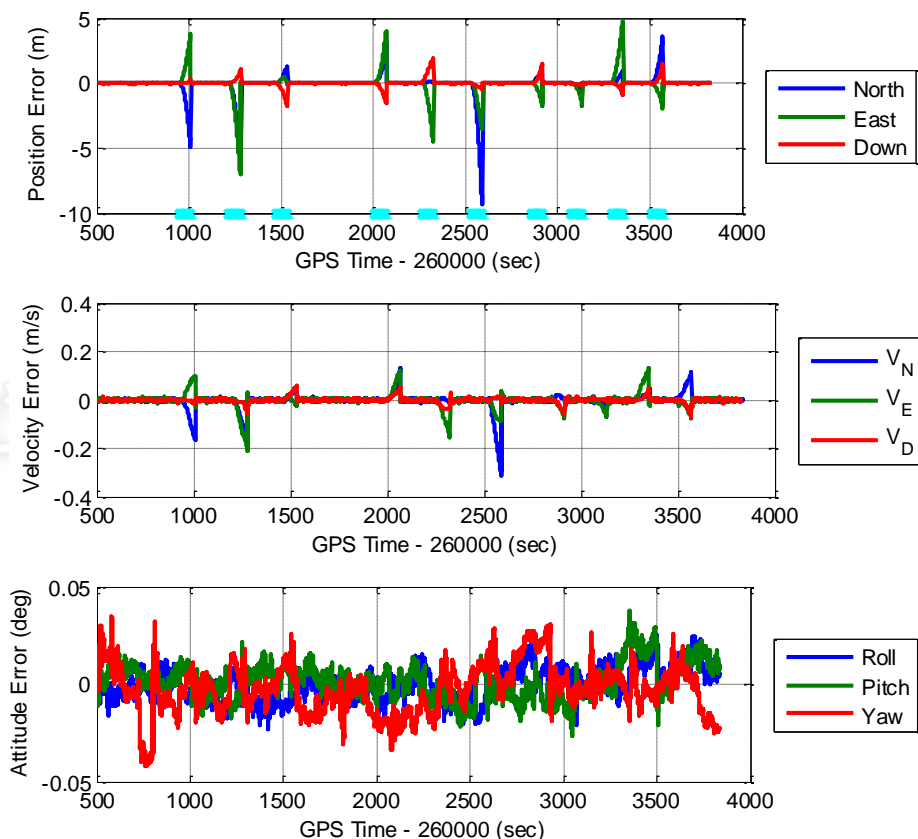


图 4-8 无杆臂误差情况下，GNSS/INS 组合导航误差

对无杆臂误差情况下，FSAS 组合导航 60 秒 GNSS 中断内的误差发散进行统计，得到对应均值，均方根和最大值，如表 4-1 所示。

表 4-1 无杆臂误差时，60s GNSS 中断的导航误差统计

项目 统计	E (m)	N (m)	U (m)	Roll (deg)	Pitch (deg)	Heading (deg)
Mean	4.7148	0.6137	0.1563	0.0193	0.0174	0.0123
RMS	5.4208	0.9356	0.1765	0.0291	0.0181	0.0144
MAX	9.6536	1.8983	0.3227	0.0553	0.0288	0.0297

#### 4.3.1.2 设置杆臂误差

在 x, y 方向（对应于载体的前向和右向）设置 ±10cm 的杆臂误差，进行详细的评估和分析，其它情况则直接给出最终的统计结果和结论。

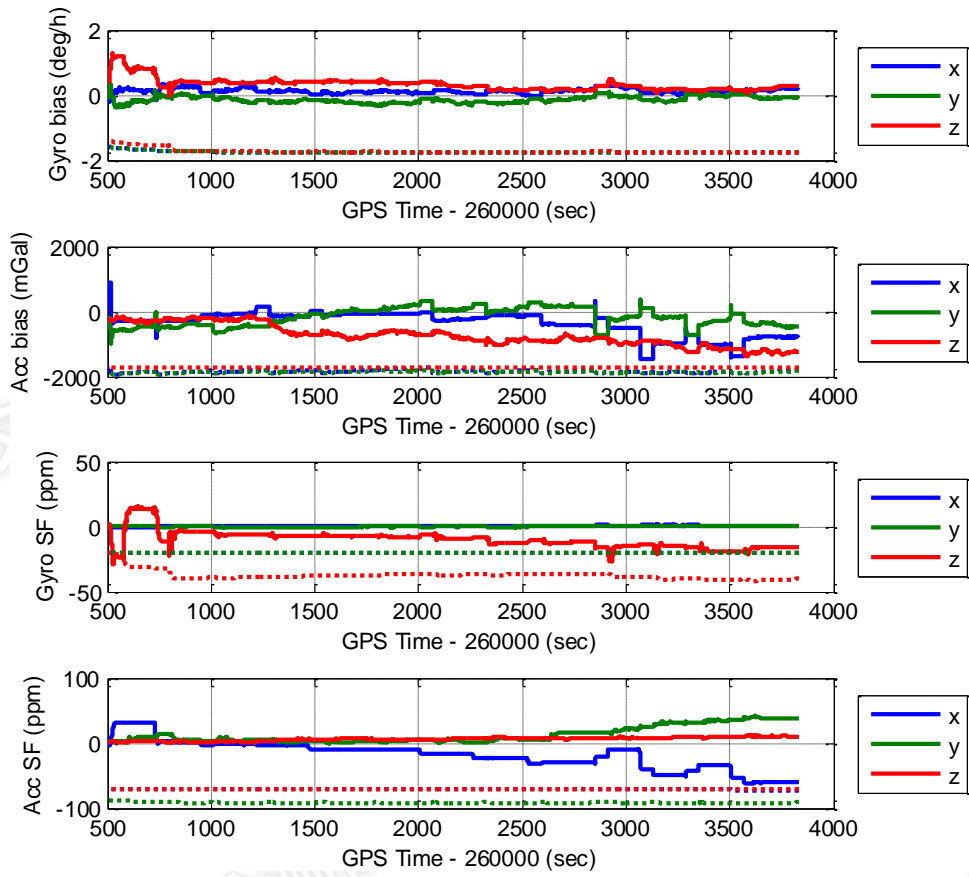


图 4-9 惯性传感器误差参数在线估计结果，从图中可以看出结果符合典型的战术级惯性导航水平

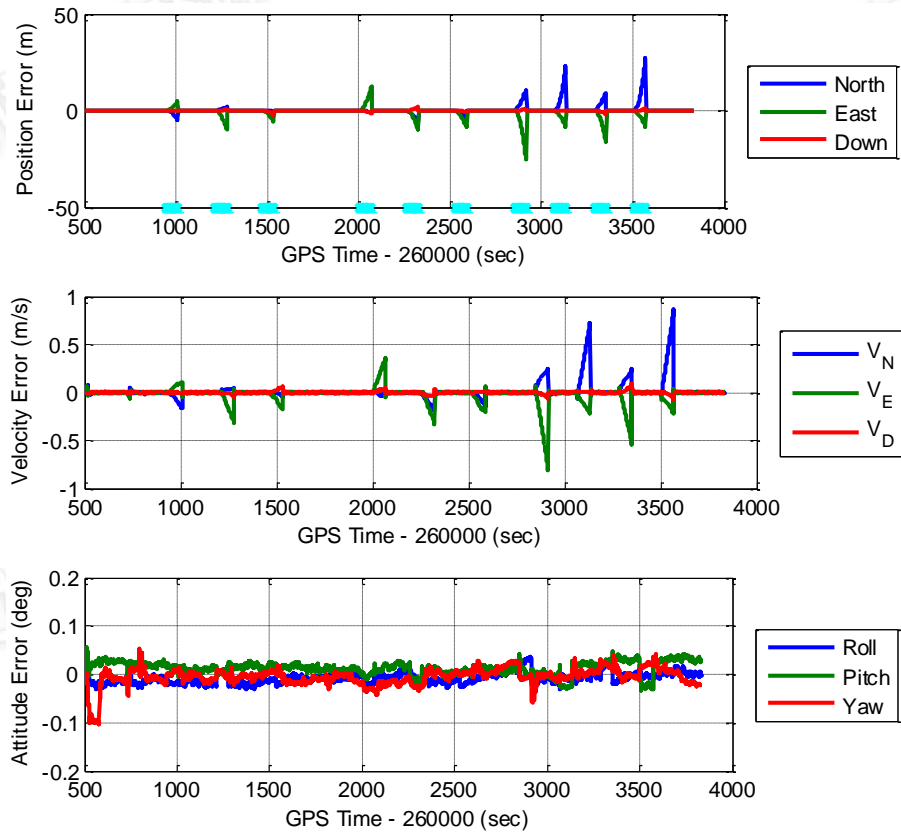


图 4-10 GNSS 中断时的导航误差发散统计图

表 4-2 给出了不同杆臂误差情况下，60 秒 GNSS 中断时间内的 GNSS/INS 组合

导航误差发散统计。表中第一列分别表示 X, Y 方向上的杆臂误差值, 例如第二行表示 X, Y 方向上的杆臂误差均设置为+10cm。

表 4-2 SPAN-FSAS 设置不同杆臂误差时的导航误差均方根 (RMS)

杆臂误差 (cm)	Position Error(m)		VelocityError((m/s)		AttitudeError(deg)	
	x/y	z	x/y	z	x/y	z
0, 0	5.42	0.94	0.18	0.03	0.02	0.01
+10, +10	16.91	0.91	0.54	0.04	0.03	0.02
-10, -10	16.39	0.97	0.52	0.03	0.02	0.02
+10, -10	17.61	1.19	0.57	0.03	0.03	0.03
-10, +10	16.12	0.80	0.50	0.03	0.03	0.01
+5, +5	9.78	0.92	0.31	0.03	0.02	0.01
-5, -5	9.33	0.95	0.30	0.03	0.02	0.02
+5, -5	10.29	1.05	0.34	0.03	0.02	0.02
-5, +5	8.98	0.85	0.28	0.03	0.02	0.01
+1, +1	5.72	0.93	0.19	0.03	0.02	0.01
-1, -1	5.57	0.94	0.18	0.03	0.02	0.01
+1, -1	5.87	0.95	0.19	0.03	0.02	0.02
-1, +1	5.42	0.92	0.17	0.03	0.02	0.01

#### 4.3.2 RTK + POS830

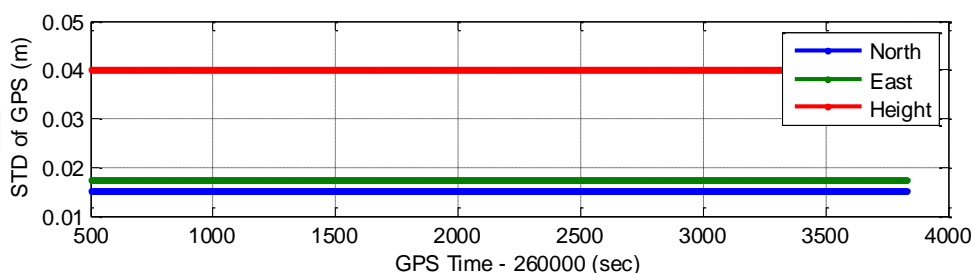


图 4-11 GNSS 位置精度

表 4-3 给出了不同杆臂误差情况下, 60 秒 GNSS 中断时间内的 RTK+POS830 组合导航误差发散统计。表中第一列分别表示 X, Y 方向上的杆臂误差值, 例如第二行表示 X, Y 方向上的杆臂误差均设置为+10cm。

表 4-3 POS830 设置不同杆臂误差时的导航误差均方根 (RMS, 60s GNSS 中断)

杆臂误差 (cm)	Position Error(m)		VelocityError((m/s)		AttitudeError(deg)	
	x/y	z	x/y	z	x/y	z
0, 0	0.2298	0.0599	0.0069	0.0015	0.0005	0.0012
+10, +10	0.5361	0.0575	0.0119	0.0016	0.0010	0.0054
-10, -10	0.3968	0.0624	0.0108	0.0014	0.0009	0.0070
+10, -10	0.4139	0.0615	0.0087	0.0067	0.0005	0.0018
-10, +10	0.5426	0.0586	0.0130	0.0016	0.0011	0.0069
+5, +5	0.3576	0.0587	0.0087	0.0015	0.0007	0.0024
-5, -5	0.2490	0.0611	0.0075	0.0014	0.0006	0.0040
+5, -5	0.2584	0.0606	0.0068	0.0014	0.0006	0.0023
-5, +5	0.3589	0.0592	0.0094	0.0015	0.0007	0.0039

+1,+1	0.2472	0.0596	0.0071	0.0015	0.0005	0.0008
-1,-1	0.2188	0.0601	0.0068	0.0015	0.0005	0.0016
+1,-1	0.2199	0.0600	0.0066	0.0015	0.0005	0.0008
-1,+1	0.2467	0.0598	0.0072	0.0015	0.0005	0.0017

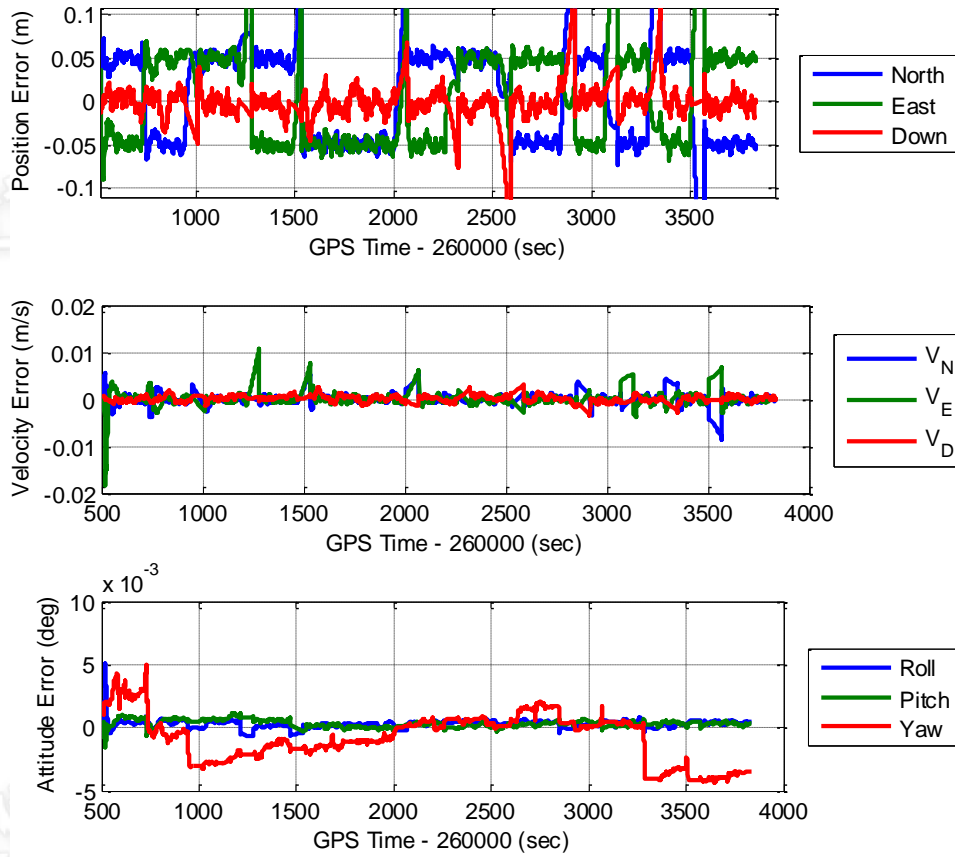


图 4-12 POS830 GNSS (RTK)中断时的导航误差发散图

从图 4-12 中看出，位置漂移误差在没有仿真 GNSS 信号中断的地方，由于存在杆臂误差，平面杆臂误差设置为 (+5cm,-5cm)，位置误差有明显的常值偏差，这个偏差的大小与载体的运动状态和杆臂误差的大小密切相关，它既非系统误差也非偶然误差，由于仿真轨迹比较特殊，只有北向和东向运动，所以位置的常值偏差与杆臂误差相当。

### 4.3.3 RTK + MTi-G

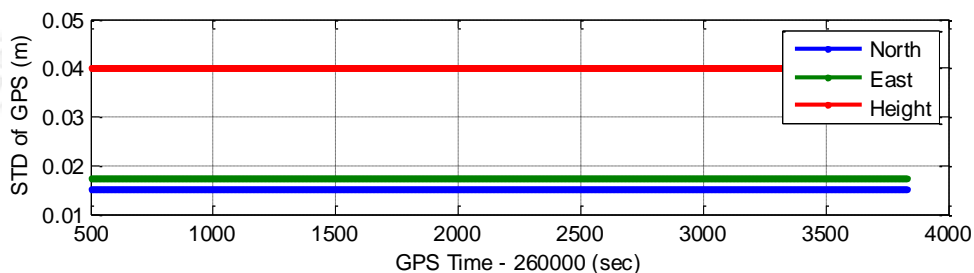


图 4-13 GNSS 位置精度

表 4-4 给出了不同杆臂误差情况下，30 秒 GNSS 中断时间内的 RTK+MTi-G 组合

导航误差发散统计。表中第一列分别表示 X, Y 方向上的杆臂误差值, 例如第二行表示 X, Y 方向上的杆臂误差均设置为+10cm。

表 4-4 MTi-G 设置不同杆臂误差时的导航误差均方根 (RMS, 30s GNSS 中断)

杆臂误差 (cm)	Position Error(m)		VelocityError((m/s)		AttitudeError(deg)	
	x/y	z	x/y	z	x/y	z
0, 0	6.58	0.38	0.59	0.025	0.271	0.191
+10, +10	15.79	0.43	1.04	0.023	0.312	0.623
-10, -10	20.18	0.41	1.45	0.032	0.350	0.741
+10, -10	11.85	0.36	0.87	0.024	0.317	0.818
-10, +10	13.88	0.39	1.03	0.028	0.283	0.727
+5, +5	8.73	0.40	0.64	0.024	0.272	0.334
-5,-5	12.37	0.39	0.95	0.028	0.298	0.421
+5,-5	7.76	0.37	0.64	0.025	0.288	0.459
-5,+5	9.38	0.39	0.76	0.027	0.268	0.378
+1,+1	6.21	0.39	0.56	0.025	0.268	0.187
-1,-1	7.34	0.38	0.64	0.026	0.274	0.217
+1,-1	6.46	0.38	0.58	0.025	0.273	0.221
-1,+1	6.89	0.39	0.61	0.026	0.269	0.188

从表 4-12、4-3、4-4 和图 4-12 中, 我们可以得出以下结论:

- 1) 当杆臂设置为 1cm 时, GNSS/INS 组合导航的各项误差 (包括东向位置误差、北向位置误差、高程误差和三轴姿态误差) 均与没有设置杆臂误差时 ( $X=0$ ,  $Y=0$ ) 的情况几乎一致。这是因为, 在 GNSS/INS 组合导航仿真数据时, GNSS 定位噪声给的是 1.5cm、2.0cm 和 4.0cm, 如图 4-7 所示, 杆臂误差被 GNSS 定位误差掩盖了。
- 2) 杆臂误差越大, GNSS/INS 组合导航的位置误差也越大, 但是杆臂超过 GNSS 定位精度时, 位置误差会出现既非系统误差也非偶然误差的漂移, 这个漂移量与载体的动态密切相关, 如图 4-12 中的位置误差所示, 尤其是对于高精度惯导来说更加明显, 这是因为高精度惯导在 GNSS 信号中断时间内漂移小, 相比较之下由杆臂误差导致的位置漂移相对很大很明显。
- 3) 在杆臂误差不大于 1cm 时, 姿态精度受杆臂误差的影响可以忽略。

#### 4.3.4 SPP + SPAN-FSAS

针对 GNSS 单点定位模式, 数据仿真时添加米级误差, 如图 4-5 所示。

##### 4.3.4.1 无杆臂误差



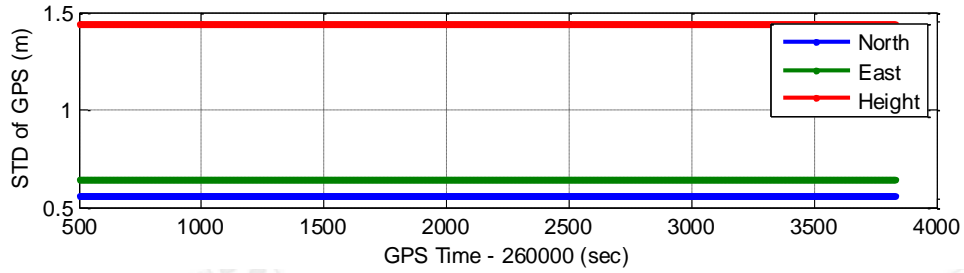


图 4-14 仿真 SPP 位置误差

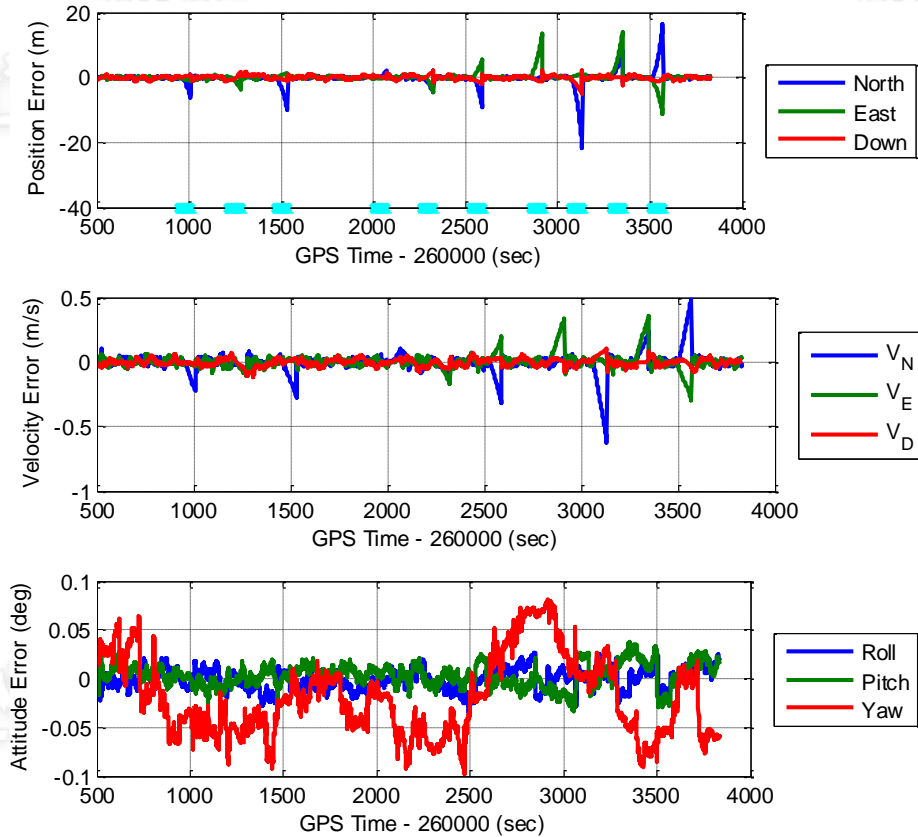


图 4-15 无杆臂误差情况下，GNSS 中断时的导航误差发散统计图 (SPP/FSAS)

表 4-5 无杆臂误差时 GNSS/INS 60s GNSS 中断的导航误差统计(SPP/FSAS)

项目 统计	E (m)	N (m)	U (m)	Roll (deg)	Pitch (deg)	Heading (deg)
Mean	10.7715	0.6800	0.3240	0.0277	0.0220	0.0352
RMS	12.3509	0.9109	0.3640	0.0393	0.0237	0.0416
MAX	20.9715	1.9559	0.6132	0.1029	0.0396	0.0786

#### 4.3.4.2 设置杆臂误差

在 x, y 方向 (对应于载体的前向和右向) 设置 ±10cm, ±50cm 和 ±100cm 的杆臂误差, 进行详细的评估和分析, 其它情况则直接给出最终的统计结果和结论。

GNSS/INS 组合导航系统中杆臂影响的定量分析

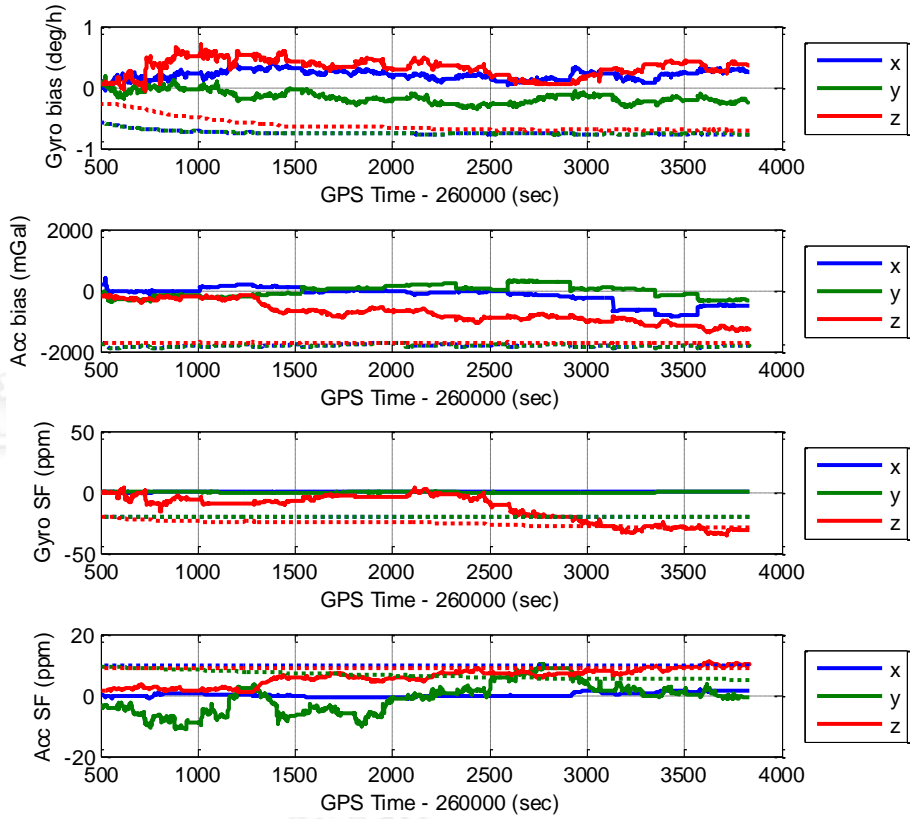


图 4-16 惯性传感器误差参数估计

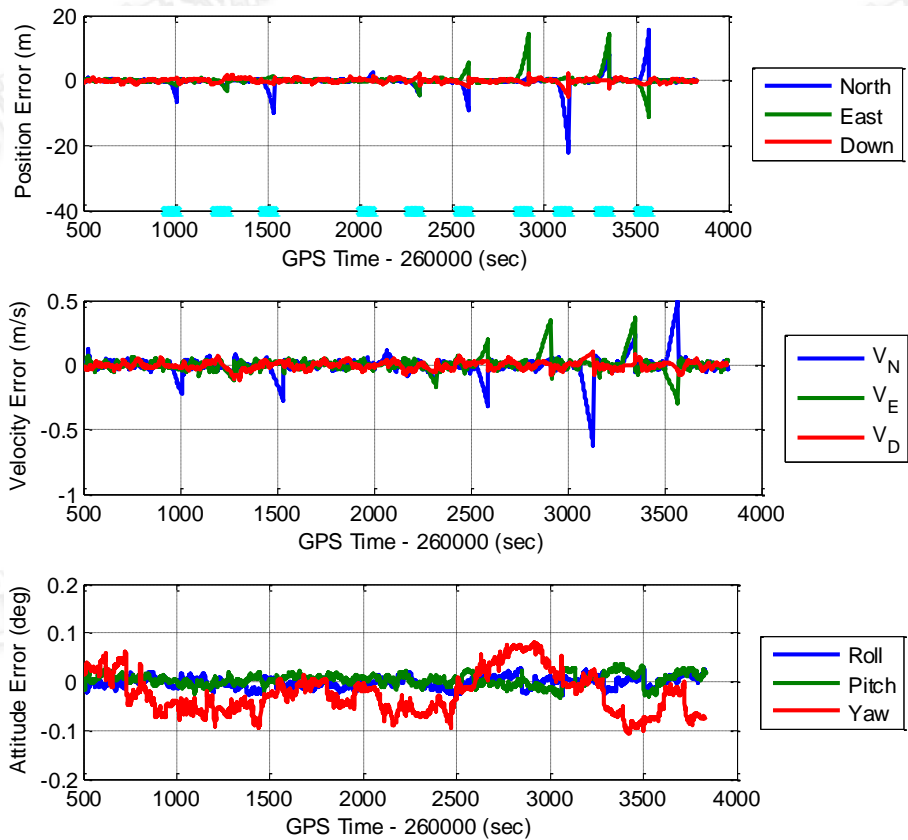


图 4-17 GNSS 中断时的导航误差发散统计图

表 4-6 给出了不同杆臂误差情况下，60 秒 GNSS 中断时间内的 SPP GNSS/INS

组合导航误差发散统计。表中第一列分别表示 X, Y 方向上的杆臂误差值, 例如第二行表示 X, Y 方向上的杆臂误差均设置为+10cm。

表 4-6 SPAN-FSAS 设置不同杆臂误差时的导航误差均方根 (RMS)

杆臂误差 (cm)	Position Error(m)		VelocityError((m/s)		AttitudeError(deg)	
	x/y	z	x/y	z	x/y	z
0, 0	12.35	0.91	0.36	0.039	0.024	0.042
+10, +10	12.56	0.91	0.37	0.039	0.024	0.047
-10, -10	12.17	0.92	0.36	0.039	0.023	0.038
+10, -10	12.29	0.91	0.36	0.039	0.024	0.048
-10, +10	12.44	0.91	0.37	0.039	0.024	0.037
+50, +50	13.55	0.89	0.38	0.040	0.026	0.078
-50, -50	11.63	0.94	0.36	0.039	0.023	0.050
+50, -50	12.29	0.92	0.36	0.039	0.025	0.081
-50, +50	13.03	0.91	0.37	0.040	0.025	0.043
+100, +100	15.12	0.87	0.40	0.040	0.029	0.124
-100, -100	11.50	0.96	0.36	0.039	0.025	0.091
+100, -100	12.84	0.94	0.38	0.038	0.028	0.128
-100, +100	14.23	0.91	0.39	0.041	0.028	0.084

#### 4.3.5 SPP + MTi-G

针对 GNSS 单点定位模式, 数据仿真时添加米级误差, 如图 4-所示。

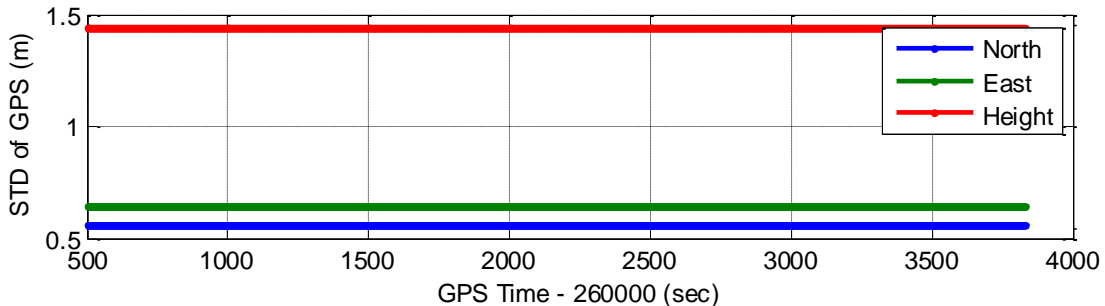


图 4-18 GNSS 位置精度

在 x, y 方向 (对应于载体的前向和右向) 设置 ±10cm, ±50cm 和 ±100cm 的杆臂误差, 进行详细的评估和分析, 其它情况则直接给出最终的统计结果和结论。表 4-7 给出了不同杆臂误差情况下, 30 秒 GNSS 中断时间内的 SPP GNSS/INS 组合导航误差发散统计。表中第一列分别表示 X, Y 方向上的杆臂误差值, 例如第二行表示 X, Y 方向上的杆臂误差均设置为+10cm。

表 4-7 MTi-G 设置不同杆臂误差时的导航误差均方根 (RMS, 30s GNSS 中断)

杆臂误差 (cm)	Position Error(m)		VelocityError((m/s)		AttitudeError(deg)	
	x/y	z	x/y	z	x/y	z
0, 0	15.19	1.82	0.90	0.075	0.295	0.430
+10, +10	15.35	1.80	0.90	0.076	0.299	0.417
-10, -10	15.09	1.83	0.90	0.075	0.293	0.444

+10, -10	15.22	1.83	0.90	0.075	0.300	0.436
-10, +10	15.24	1.80	0.91	0.076	0.292	0.425
+50, +50	16.69	1.74	0.94	0.078	0.317	0.377
-50,-50	15.46	1.90	0.93	0.073	0.287	0.511
+50,-50	16.25	1.89	0.91	0.073	0.329	0.468
-50,+50	16.34	1.76	0.98	0.078	0.289	0.413
+100,+100	19.54	1.67	1.04	0.080	0.352	0.362
-100,-100	17.47	1.98	1.02	0.071	0.297	0.607
+100,-100	19.18	1.96	1.01	0.071	0.376	0.522
-100,+100	19.32	1.72	1.13	0.082	0.317	0.418

#### 4.3.6 SPP + POS830

针对 GNSS 单点定位模式，数据仿真时添加米级误差，如图 4-所示。

在 x, y 方向（对应于载体的前向和右向）设置  $\pm 10\text{cm}$ ， $\pm 50\text{cm}$  和  $\pm 100\text{cm}$  的杆臂误差，进行详细的评估和分析，其它情况则直接给出最终的统计结果和结论。表 4-8 给出了不同杆臂误差情况下，60 秒 GNSS 中断时间内的 SPP GNSS/INS 组合导航误差发散统计。表中第一列分别表示 X, Y 方向上的杆臂误差值，例如第二行表示 X, Y 方向上的杆臂误差均设置为  $+10\text{cm}$

表 4-8 POS830 设置不同杆臂误差时的导航误差均方根（RMS，60s GNSS 中断）

杆臂误差 (cm)	Position Error(m)		VelocityError((m/s)		AttitudeError(deg)	
	x/y	z	x/y	z	x/y	z
0, 0	0.4689	0.4258	0.0088	0.0066	0.0005	0.0018
+10, +10	0.4526	0.4260	0.0084	0.0066	0.0005	0.0016
-10, -10	0.5085	0.4257	0.0094	0.0067	0.0006	0.0022
+10, -10	0.4590	0.4248	0.0087	0.0067	0.0005	0.0018
-10, +10	0.5023	0.4269	0.0092	0.0066	0.0006	0.0031
+50, +50	0.6801	0.4265	0.0101	0.0066	0.0006	0.0030
-50,-50	0.8134	0.4252	0.0141	0.0067	0.0008	0.0045
+50,-50	0.6543	0.4208	0.0117	0.0067	0.0007	0.0084
-50,+50	0.7900	0.4310	0.0133	0.0066	0.0008	0.0100
+100,+100	1.1601	0.4273	0.0174	0.0065	0.0010	0.0061
-100,-100	1.3093	0.4245	0.0227	0.0068	0.0012	0.0077
+100,-100	1.1435	0.4158	0.0203	0.0067	0.0012	0.0174
-100,+100	1.2778	0.4364	0.0218	0.0066	0.0013	0.0190

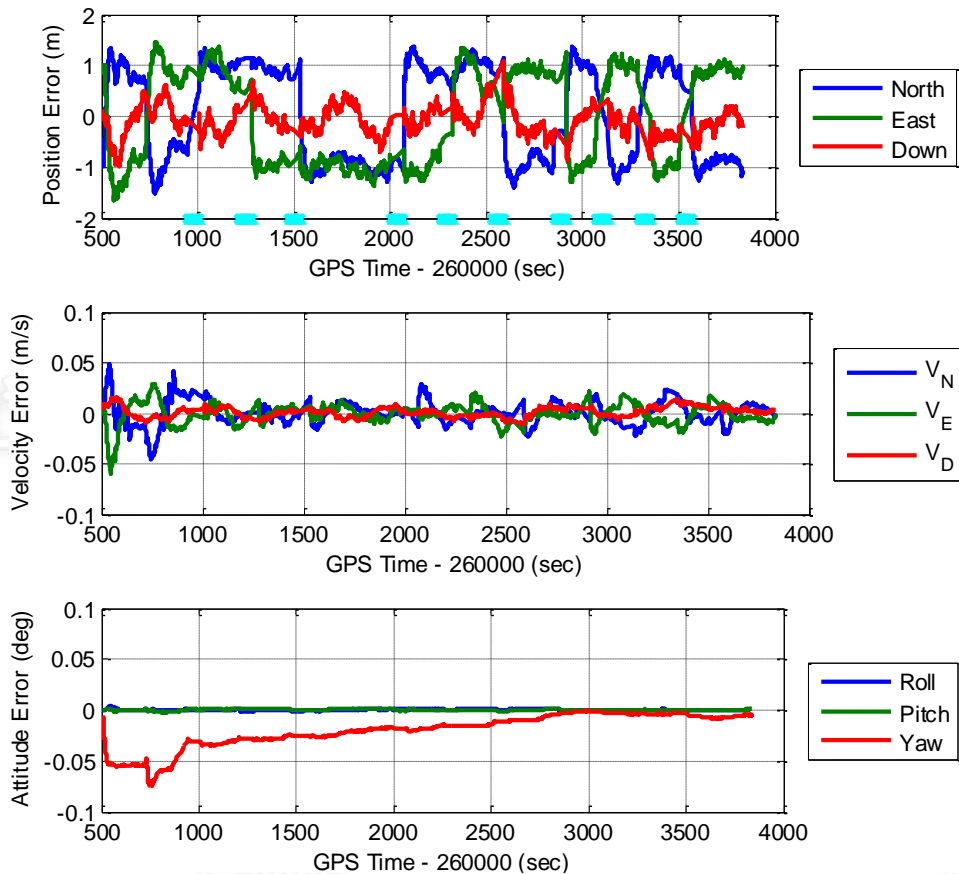


图 4-19 POS830 GNSS (SPP) 中断时的导航误差发散图

图 4-19 中，POS830 与 SPP 组合时，设置平面杆臂误差为 (+1m,-1m)，此时的 GNSS 信号中断 60s 的位置漂移完全掩盖于 1m 的杆臂误差中，这是由于 POS830 是导航级精度的惯导，所以 60s 的位置漂移很小。

从表 4-6、4-7、4-8 和图 4-19 中，可以看出：

- 1) 由于杆臂设置不超过 0.1m，GNSS/INS 组合导航的各项误差（包括东向位置误差、北向位置误差、高程误差和三轴姿态误差）均与没有设置杆臂误差时（ $X=0, Y=0$ ）的情况几乎一致。这是因为设置的杆臂误差与 SPP GNSS 定位误差水平相当，杆臂误差被掩盖到 SPP GNSS 定位误差之中。
- 2) 当杆臂误差设置超过 GNSS 定位精度时，在 GNSS 信号中断处，不光有导航误差漂移，在 GNSS 信号没有中断的地方，会出现如图 4-19 类似的导航误差，它既非系统误差也非偶然误差，它的大小与载体运动状态和杆臂误差大小都有密切关系。

## 4.4 结果分析

- 1) 在不同的 GNSS 定位模式下, 如果设置的杆臂误差不大于 GNSS 定位误差精度或者与 GNSS 定位误差精度水平相当, 则杆臂误差不会对最终的 GNSS/INS 组合导航误差造成显著的影响。这可以认为杆臂误差能够被 GNSS 定位误差掩盖。
- 2) 在 GNSS 信号中断处, 不光有导航误差漂移, 在 GNSS 信号没有中断的地方, 会出现类似常值偏差的导航误差, 但实际上它既非系统误差也非偶然误差, 它的大小与载体运动状态和杆臂误差大小都有密切关系。
- 3) 当杆臂误差超过一定范围时, 不但会造成 GNSS/INS 的位置发散, 同样也会对姿态造成显著的影响。杆臂不但影响定位, 而且影响组合导航的深层性能。

## 4.5 本章小结

本章介绍了 GNSS/INS 杆臂影响定量分析的实验和数据分析。首先介绍了数据处理方案及用于数据处理的 GINS 软件解算原理及其主要功能, 其次介绍了导航误差分析方法, 最后分别对不同的应用场景和杆臂误差的量级进行了数据分析, 得出相应的结论。

## 第 5 章 总结与展望

### 5.1 总结

GNSS/INS 组合导航的三类误差源中 INS 相关误差源和辅助信息量测误差对 GNSS/INS 组合导航的影响，这方面的研究已经相对成熟。然而对于杆臂误差，一般的组合导航应用会给出如下的定性描述：GNSS 天线杆臂必须精确测量和标定，杆臂测量误差会导致同等量级的组合导航位置误差，如厘米级的杆臂误差会导致厘米级的 GNSS/INS 组合导航误差。这类描述对于精密地 GNSS/INS 组合导航应用来说显然是不够的，因此本文专门针对这一问题进行研究和讨论，对 GNSS/INS 组合导航系统中的杆臂误差对最终的组合导航结果的影响，进行定量分析，为 GNSS/INS 组合导航算法设计和应用提供定量的参考。本文的主要工作及结论可归纳如下：

- (1) 本文从分析组合导航基本原理入手，介绍了惯性导航技术和 GNSS/INS 组合导航算法，以松组合为例推导了组合导航 kalman 滤波的状态方程和观测方程。
- (2) 本文介绍了杆臂误差影响的定量分析方法，使用武汉大学卫星导航定位技术研究中心开发的软件进行数据仿真和组合导航解算。在仿真 IMU 原始数据及 GNSS 位置和速度结果时，仿真器都是在真值的基础上加上相应的误差得到仿真数据，而不带误差的参考真值的精度就很高了。
- (3) 通过实验及数据分析可知，杆臂不但影响定位，而且影响组合导航的深层性能，不同组合导航系统对杆臂精度的要求也不同。GNSS 定位精度与杆臂误差的大小，当定位精度与杆臂误差相当时，杆臂误差会被 GNSS 定位误差掩盖，对组合导航结果的影响体现不明显，然而当 GNSS 定位精度高，杆臂误差相对较大时，这是杆臂误差对组合导航的结果影响就能体现的很明显。
- (4) 由于 Kalman 滤波收敛的快慢与载体动态条件丰富相关，动态条件越丰富收敛的越快，所以用仿真器仿真载体运动轨迹时，在起始位置尽量多设置一些加减速和转弯调头的动态条件。

## 5.2 展望

随着车载 GNSS/INS 组合导航城市测绘等领域的应用越来越广，车载 GNSS/INS 组合导航的精度也面临着越来越高的要求。近年来逐渐兴起的低精度 MEMS 级别惯性传感器以其小型、低成本也越来越多的受到测绘领域的青睐，因此保证 GNSS/INS 组合导航具有足够的精度对于测绘行业的繁荣与提升竞争力具有极大意义。本文采用仿真分析的方法对 GNSS/INS 组合导航中的杆臂影响进行了定量分析，对 GNSS/INS 组合导航算法和应用具有积极的指导意义和应用价值。但本文的研究也有一些不足，这将是后续工作要解决的问题或研究的主要方向，这些不足包括以下几点：

- (1) 文中只仿真了 RTK 和 SPP 的 GNSS 定位模式，没有仿真 PPP 的定位模式，在今后的研究中，可以验证 DGPS 模式下的组合导航杆臂误差结论是否与 RTK 和 SPP 一致。
- (2) 文章没有利用实测数据验证杆臂误差的影响，今后的研究中开展跑车实验获得实测数据，研究杆臂误差的影响是否也是符合仿真数据的结论，得到更为有力的实验验证结果。



## 参考文献

- [1] Titterton D, Weston J L. Strapdown inertial navigation technology[M].IET, 2004.
- [2] Groves P D. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems[M].Artech House, 2013.
- [3] 李征航, 张小红. 卫星导航定位新技术及高精度数据处理方法[M].武汉大学出版社, 2009.
- [4] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M].武汉大学出版社, 2010.
- [5] Conley R, Cosentino R, Hegarty C J, et al. Performance of stand-alone GPS[J]. Kaplan & CJ Hegarty (Eds.), Understanding GPS: Principles and applications, 2006:301-378.
- [6] Farrell J, Barth M. The global positioning system and inertial navigation[M].McGraw-Hill New York, 1999.
- [7] Schmidt G, Phillips R. INS/GPS Integration Architecture Performance Comparisons, NATO RTO Lecture Series[R]. RTO-EN-SET-116, Low-Cost Navigation Sensors and Integration Technology, Publ., Prague, 2008:
- [8] Ham F M, Brown R G. Observability, eigenvalues, and Kalman filtering[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 1983(2):269-273.
- [9] Bar-Itzhack D G I. Observability Analysis of Piece-Wise Constant Systems-Part 1: Theory[J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1992,28(4):1056-1068.
- [10] Shin E, El-Sheimy N. Accuracy improvement of low cost INS/GPS for land applications[M].University of Calgary, Department of Geomatics Engineering, 2001.
- [11] Hong S, Lee M H, Chun H, et al. Observability of error states in GPS/INS integration[J]. Vehicular Technology, IEEE Transactions on, 2005,54(2):731-743.
- [12] Gelb A. Applied optimal estimation[M].MIT press, 1974.
- [13] Maybeck P S. Stochastic models, estimation, and control[M].Academic press, 1982.
- [14] Grewal M S, Andrews A P. Kalman filtering: theory and practice using MATLAB[M].John Wiley & Sons, 2011.
- [15] Basil H, Anathasayanam M, Puri S. Adaptive Kalman Filter Tuning in Integration of Low-Cost MEMS-INS/GPS[J]. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2004.
- [16] Goodall C, El-Sheimy N. Intelligent Tuning of a Kalman Filter for INS/GPS Navigation Applications[A]. In: Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007), 2007[C].
- [17] Kennedy S, Cosandier D, Hamilton J. GPS/INS Integration in Real-time and Post-processing with NovAtel's SPAN System[A]. In: Proceedings of the International Global Navigation Satellite Systems Society Symposium 2007, 2007[C].
- [18] Kennedy S, Hamilton J, Martell H. Architecture and system performance of SPAN - NovAtel's GPS/INS solution[J]. Proceedings of IEEE/ION PLANS 2006, 2006:23-25.
- [19] Reid D B, Lithopoulos E, Hutton J. Position and orientation system for direct georeferencing (POS/DG)[A]. In: Proceedings of the 54th Annual Meeting of The Institute of Navigation, 1998[C].
- [20] Niu X, Zhang H, Shi C, et al. A proposed evaluation standard for the navigation results of MEMS INS/GPS integrated systems[A]. In: Proceedings of the International Symposium on GPS/GNSS, 2010[C].

- [21] Novatel.IMU-FSASUserGuide[EB/OL].:  
<http://webone.novatel.ca/assets/Documents/Waypoint/Inertial Explorer.pdf>,
- [22] Titterton D, Weston J L. Strapdown inertial navigation technology[M].IET, 2004.
- [23] 陈哲. 捷联惯性导航系统原理[Z]. 北京: 宇航出版社, 1986.
- [24] 张天光, 王秀萍, 王丽霞. 捷联惯性导航技术[Z]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
- [25] Rogers R M. Applied mathematics in integrated navigation systems[M].Aiaa, 2003.
- [26] Shin E. Estimation techniques for low-cost inertial navigation[J]. UCGE report, 2005,20219.
- [27] 秦永元. 惯性导航[M].科学出版社, 2006.
- [28] Groves P D. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems[M].Artech House, 2013.
- [29] Savage P G. Strapdown analytics[M].Strapdown Associates Maple Plain, MN, USA, 2000.
- [30] Jekeli C. Inertial navigation systems with geodetic applications[M].Walter de Gruyter, 2001.
- [31] Farrell J L. GNSS Aided Navigation & Tracking: Inertially Augmented Or Autonomous[M].American Literary Press, 2007.
- [32] 石波. 非线性滤波理论及其在 GPS/INS 组合定位定姿中的应用研究[D]. 青岛: 山东科技大学博士论文, 2008:
- [33] 吴富梅. GNSS/INS 组合导航误差补偿与自适应滤波理论的拓展[J]. 测绘学报, 2010,40(3):401.
- [34] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 1971(1):61-66.
- [35] Miller R B. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983,6(4):287-291.
- [36] Benson D O. A comparison of two approaches to pure-inertial and Doppler-inertial error analysis[J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 1975(4):447-455.
- [37] Scherzinger B, Reid D B. Modified strapdown inertial navigator error models[A]. In: Position Location and Navigation Symposium, 1994., IEEE, 1994[C]. IEEE.
- [38] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Fluids Engineering, 1960,82(1):35-45.
- [39] Gelb A. Applied optimal estimation[M].MIT press, 1974.
- [40] Maybeck P S. Stochastic models, estimation, and control[M].Academic press, 1982.
- [41] Brown R G, Hwang P Y. Introduction to random signals and applied Kalman filtering[M].Wiley New York, 1992.
- [42] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M].西北工业大学出版社, 1998.
- [43] 付梦印, 邓志红, 张继伟. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M].科学出版社, 2003.
- [44] 杨元喜. 自适应动态导航定位[M].测绘出版社, 2006.
- [45] Jazwinski A H. Stochastic processes and filtering theory[M].Courier Corporation, 2007.
- [46] Ban Y, Niu X, Zhang T, et al. Low-end MEMS IMU can contribute in GPS/INS deep integration[A]. In: Position, Location and Navigation Symposium-PLANS 2014, 2014 IEEE/ION, 2014[C]. IEEE.
- [47] Rauch H E, Striebel C T, Tung F. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems[J]. AIAA journal, 1965,3(8):1445-1450.
- [48] Niu X, Zhang Q, Gong L, et al. 2014b. Development and evaluation of GNSS/INS data processing software for position and orientation systems[J]. Survey Review, 2014.
- [49] Niu X, Chen Q, Zhang Q, et al. Using Allan variance to analyze the error characteristics of GNSS

- positioning[J]. GPS solutions, 2014,18(2):231-242.
- [50] El-Sheimy N, Hou H, Niu X. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance[J]. Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 2008,57(1):140-149.

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

## 致谢

时光如梭，光阴似箭。转眼间，研究生三年已接近尾声了，回首这三年的学习和生活，真是感慨颇多。值此论文完成之际，我要向关心和帮助过我的人表示诚挚的感谢。

首先要感谢的是我的导师牛小骥教授，本论文从选题到实验再到撰写过程都是在牛老师的悉心指导下完成的。牛老师对待学问一丝不苟严肃认真的态度，对待工作勤勤恳恳爱岗敬业的作风，待人接物平易近人的心态，都是我以后学习和工作中的榜样。牛老师不仅在学习上悉心指导我，在生活中也非常关心我，让我在研究生阶段的求学中能够顺利的完成学业。在此，谨向导师表示最衷心的感谢和崇高的敬意。

其次要感谢导航组所有的老师和同学们，感谢他们营造的良好的学习氛围，是他们热情的关心和无私的帮助，让我在三年的学习生活中有一个很好的学习环境。感谢张全师兄和龚琳琳师姐，感谢他们在我刚开始接触专业学习时给我悉心的指导和帮助，让我走进了惯导和组合导航的大门。感谢陈起金师兄，陈师兄不仅是我学习中的好榜样，也是生活中的好朋友，感谢他不仅在学习上给了我很大的帮助，更感谢他在我生活中遇到困难时，每次都尽心尽力的为我排忧解难。感谢班亚龙师兄，感谢他在跑车试验中给我的帮助和指导，他的认真严谨，勤奋刻苦的学习态度是我的榜样。感谢王强师弟，感谢他帮助我学习和使用数据仿真器，使得我论文能够顺利完成。还要感谢同一个宿舍的兄弟们，薛长虎、赵乐文和蒋科材，在研究生的学习之余，是他们在校园生活中带给我很多的乐趣。

最后要感谢我的父母、妹妹和很多的亲朋好友，感谢父母抚养我付出的艰辛和努力，感谢妹妹对我的关心和鼓励，感谢亲朋好友对我的关心和支持，是你们无私的爱让我能始终以轻松的心态和饱满的精神投入到学习研究中去。