

分类号

U D C

密级

编号

10486

武汉大学

博士学位论文

单频多模 GNSS/INS/视觉紧组合高精度  
位姿估计方法研究

研究生姓名：李团

指导教师姓名、职称：章红平 教授  
牛小骥 教授

学科、专业名称：大地测量学与测量工程

研究方向：多传感器组合导航

二〇一九年五月

# **Research on the Tightly Coupled Single-frequency multi-GNSS/INS/Vision Integration for Precise Position and Orientation Estimation**

**By**

**Tuan Li**

**Supervised By**

**Prof. Hongping Zhang**

**Prof. Xiaoji Niu**

**Wuhan University**

**May, 2019**

## 论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者（签名）：

年 月 日

## 武汉大学学位论文使用授权协议书

(一式两份，一份论文作者保存，一份留学校存档)

本学位论文作者愿意遵守武汉大学关于保存、使用学位论文的管理办法及规定，即：学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供文献检索与阅览服务；学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；在以教学与科研服务为目的前提下，学校可以在校园网内公布部分或全部内容。

一、在本论文提交当年，同意在校园网内以及中国高等教育文献保障系统(CALIS)、高校学位论文系统提供查询及前十六页浏览服务。

二、在本论文提交当年/一年/两年/三年以后，同意在校园网内允许读者在线浏览并下载全文，学校可以为存在馆际合作关系的兄弟高校用户提供文献传递服务和交换服务。(保密论文解密后遵守此规定)

论文作者(签名)：\_\_\_\_\_

学 号：\_\_\_\_\_

学 院：\_\_\_\_\_

日期： 年 月 日

## 博士生自认为的论文创新点

针对自动驾驶和移动测图等应用对复杂 GNSS 环境下的低成本连续高精度定位定姿的迫切需求,本文围绕 GNSS 精密定位技术、惯性导航技术和视觉导航技术及其融合开展研究,提出了单频多模 GNSS RTK/INS/单目相机紧组合高精度位姿估计方案,并通过实测车载数据验证了该低成本方案在复杂 GNSS 环境下进行高精度定位定姿的可行性。论文的主要创新点归纳如下:

1. 针对单频 GPS RTK 模糊度固定率低的问题,提出了单频多模 GNSS (GPS、BDS 和 GLONASS) RTK/INS 紧组合算法模型,并全面评估了单频多模 RTK/INS 紧组合在城市复杂环境下的模糊度固定与定位性能。同时,针对 GNSS 复杂环境下的观测粗差问题,实现了基于滤波新息的适用于 RTK/INS 紧组合的两步抗差算法,有效提高了复杂 GNSS 环境下的模糊度固定成功率和可靠性。

2. 针对传统惯导绝对位置约束辅助模糊度固定方法在系统有偏状态下无法正确固定模糊度甚至引起滤波发散的难题,创新性地提出了惯导相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型,克服了传统惯导辅助模糊度固定方法的缺陷。由于该方法利用了 INS 相对测量的本质,不受系统状态绝对有偏的影响,因此可以在 RTK/INS 紧组合状态有偏时正确固定模糊度,而且各独立滑动窗口中解算的模糊度可以互相检核从而进一步提高模糊度固定可靠性。

3. 首次将视觉信息应用到 GNSS RTK 高精度定位中,提出了单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合低成本高精度定位定姿新方案,在地心地固坐标系下构建了 RTK/INS/视觉紧组合位姿估计滤波模型,有效解决了低成本 MEMS 惯导在 GNSS 信号中断期间导航误差快速漂移问题,极大地提高了 GNSS 复杂环境下的定位、测速和定姿的精度、连续性和可用性。同时,本文指出在未知环境下视觉辅助使得航向精度得以改善的本质原因是视觉/INS 紧组合可以有效估计陀螺零偏从而减缓航向发散速度。

# 目 录

目 录.....	I
图目录.....	V
表目录.....	IX
缩略词.....	X
摘 要.....	XII
<b>ABSTRACT</b> .....	XV
<b>1 绪论</b> .....	1
1.1 研究背景与意义.....	1
1.2 相关技术研究现状.....	5
1.2.1 GNSS 精密相对定位技术研究现状.....	5
1.2.2 GNSS/INS 组合导航技术研究现状.....	6
1.2.3 视觉/INS 组合导航技术研究现状.....	8
1.2.4 GNSS/INS/视觉组合导航技术研究现状.....	13
1.3 研究目标与研究内容.....	15
1.4 论文章节安排.....	15
<b>2 GNSS/INS/视觉融合数学基础</b> .....	17
2.1 引言.....	17
2.2 常用坐标系.....	17
2.3 姿态参数化.....	20
2.4 GNSS 定位基础.....	21
2.4.1 GNSS 观测量.....	21
2.4.2 GNSS 误差处理方法.....	23
2.5 惯性导航基础.....	24
2.5.1 惯性传感器误差建模.....	24
2.5.2 捷联惯导机械编排.....	25
2.5.3 捷联惯导误差方程.....	28
2.6 视觉导航基础.....	30
2.6.1 针孔相机模型.....	30
2.6.2 相机标定.....	32

2.6.3	特征点三角化.....	33
2.7	最优估计方法.....	34
2.7.1	最小二乘.....	34
2.7.2	卡尔曼滤波.....	36
2.7.3	最优平滑.....	37
2.8	GNSS/INS 松组合数学模型.....	38
2.8.1	系统误差状态模型.....	39
2.8.2	GNSS 位置观测模型.....	40
2.8.3	GNSS 速度观测模型.....	40
2.9	本章小结.....	41
<b>3</b>	<b>单频多模 RTK/INS 紧组合滤波模型</b> .....	<b>42</b>
3.1	引言.....	42
3.2	多模 GNSS 融合定位时空基准.....	42
3.2.1	时间系统.....	42
3.2.2	坐标系统.....	43
3.3	单频多模 RTK 数学模型.....	45
3.3.1	函数模型.....	45
3.3.2	随机模型.....	47
3.4	RTK/INS 紧组合数学模型.....	49
3.4.1	附加模糊度参数的 RTK/INS 紧组合.....	50
3.4.2	独立解算模糊度的 RTK/INS 紧组合.....	52
3.5	RTK/INS 紧组合抗差模型.....	54
3.6	RTK/INS 紧组合算法框架.....	55
3.7	RTK/INS 紧组合算法验证与性能评估.....	57
3.7.1	开阔天空环境.....	57
3.7.2	城市复杂环境.....	66
3.8	本章小结.....	79
<b>4</b>	<b>惯导相对约束辅助模糊度固定模型</b> .....	<b>81</b>
4.1	引言.....	81
4.2	IMU 预积分测量值.....	81
4.3	INS 相对位置辅助模糊度解算原理.....	82
4.4	INS 预测的相位增量辅助周跳探测.....	84
4.5	实验分析与验证.....	85

4.5.1	车载测试描述	85
4.5.2	INS 预测的相位增量辅助周跳探测性能分析	87
4.5.3	INS 相对位置增量特点分析	88
4.5.4	INS 相对位置约束辅助模糊度固定性能分析	91
4.6	本章小结	93
<b>5</b>	<b>单频多模 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型</b>	<b>94</b>
5.1	引言	94
5.2	基于已知特征点的绝对定位滤波模型	94
5.2.1	状态模型	94
5.2.2	观测模型	95
5.3	基于多状态约束的相对定位滤波模型	96
5.3.1	状态模型	96
5.3.2	观测模型	98
5.3.3	最小二乘等价性的证明	100
5.4	RTK/INS 与视觉/INS 紧组合模型的统一	102
5.4.1	状态模型	102
5.4.2	观测模型	103
5.4.3	算法框架	103
5.5	仿真实验验证与分析	103
5.5.1	GNSS/INS/视觉仿真数据	104
5.5.2	GNSS/INS 松组合	105
5.5.3	基于已知特征点的视觉/INS 紧组合	106
5.5.4	基于多状态约束的视觉/INS 紧组合	107
5.6	本章小结	109
<b>6</b>	<b>单频多模 RTK/INS/视觉紧组合性能测试与分析</b>	<b>110</b>
6.1	引言	110
6.2	实验平台搭建	110
6.3	传感器的时空同步	111
6.3.1	时间同步	112
6.3.2	空间同步（杆臂和安装角标定）	112
6.4	测试描述与数据处理方案	113
6.4.1	车载测试描述	113
6.4.2	数据处理方案	115



6.5	实验验证与性能分析 .....	115
6.5.1	卫星可见性分析 .....	115
6.5.2	定位性能分析 .....	117
6.5.3	测速性能分析 .....	122
6.5.4	定姿性能分析 .....	125
6.6	本章小结 .....	127
7	结论与展望 .....	129
7.1	工作总结与创新点 .....	129
7.2	研究展望 .....	131
	参考文献 .....	133
	攻博期间的主要科研成果 .....	145
	致谢 .....	147

# 图目录

图 1.1 组合导航的典型应用.....	3
图 2.1 参考坐标系： $i$ 系、 $e$ 系、 $n$ 系.....	18
图 2.2 相机坐标系和像平面坐标系.....	20
图 2.3 $e$ 系下 INS 机械编排流程图.....	26
图 2.4 针孔相机透视投影模型.....	31
图 2.5 相机的径向畸变和切向畸变示意图.....	32
图 2.6 相机标定重投影误差.....	33
图 2.7 连续多帧跟踪到的特征点三角化示意图.....	33
图 2.8 松组合 Kalman 滤波算法流程图.....	39
图 3.1 单频多模 GNSS RTK/INS 抗差紧组合算法框图.....	56
图 3.2 车载测试轨迹.....	58
图 3.3 载体速度和姿态.....	58
图 3.4 $15^\circ$ 截止高度角下 GPS (G)、GPS/BDS (G+C) 和 GPS/BDS/GLONASS (G+C+R)的可见卫星数与其对应的 PDOP 值.....	59
图 3.5 GPS/BDS/GLONASS 组合系统在 $15^\circ$ 到 $40^\circ$ 截止高度角下的可见卫星数与 PDOP 值.....	60
图 3.6 截止高度角为 $15^\circ$ 时不同组合系统的单历元模糊度固定 Ratio 值序列.....	61
图 3.7 截止高度角为 $15^\circ$ 时不同组合系统 RTK 定位结果与参考值的位置差异.....	62
图 3.8 截止高度角为 $15^\circ$ 时不同组合系统 RTK/INS 紧组合定位结果与参考值的位置差异.....	63
图 3.9 卫星截止高度角为 15, 20, 25, 30, 35 和 $40^\circ$ 时 GPS/BDS/GLONASS RTK 定位结果与参考值差异.....	64
图 3.10 卫星截止高度角为 15, 20, 25, 30, 35 和 $40^\circ$ 时 GPS/BDS/GLONASS/INS 定位结果与参考值差异序列.....	64
图 3.11 GPS/BDS/GLONASS RTK/INS 紧组合在 GNSS 信号中断 5, 10, 15, 20, 25 和 30 s 时位置漂移误差 (8 个仿真段).....	65
图 3.12 卫星截止高度角为 $15^\circ$ , $20^\circ$ , $25^\circ$ , $30^\circ$ , $35^\circ$ 和 $40^\circ$ 时 GPS/BDS/GLONASS RTK 及其对应的 RTK/INS 紧组合在不同时长的 GNSS 中断后模糊度首次固定的平均时间.....	66

图 3.13 车载测试描述.....	67
图 3.14 截止高度角为 15°时 GPS ( $1 \leq PRN \leq 32$ )、BeiDou ( $33 \leq PRN \leq 67$ )和 GLONASS( $68 \leq PRN \leq 91$ )的卫星可见性.....	68
图 3.15 截止高度角为 15°时 GPS (G)、GPS+BDS (G+C) 和 GPS/BDS+GLONASS (G+C+R)的可见卫星数与其对应的 PDOP 值.....	69
图 3.16 截止高度角为 15°时 GPS+BDS+GLONASS 的所有可见卫星的伪距双差新息序列.....	70
图 3.17 一颗含有伪距粗差的卫星导致的浮点解模糊度偏差(在历元 439, 618 s 处 PRN69 卫星的高度角为 21.4°, 伪距新息为 -19.8 m, 模糊度偏差定义为为浮点模糊度与真值之间的差值).....	70
图 3.18 双差伪距新息 RMS 值与是否采用抗差算法时模糊度固定状态差异对比 (模糊度固定差异为 0 表示两种方案的模糊度固定差异相同).....	71
图 3.19 截止高度角为 15°时 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合的双差载波相位残差 (每种颜色对应一个双差观测).....	72
图 3.20 截止高度角为 15°时 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合各颗卫星的载波相位残差 RMS.....	72
图 3.21 卫星截止高度角为 15°时 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的定位结果与参考结果的位置差异时间序列 (其中正确固定解用绿色点表示, 错误固定解和浮点解分别用红色点和灰色点表示).....	74
图 3.22 卫星截止高度角为 15°时 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率.....	76
图 3.23 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在 25, 30, 35°截止高度角下对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的定位结果与参考结果的位置差异时间序列 (其中正确固定解用绿色点表示, 错误固定解和浮点解分别用红色点和灰色点表示).....	77
图 3.24 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在 25°, 30°, 35°截止高度角下对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率.....	78
图 3.25 截止高度角为 15°时 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的 GNSS 中断时长.....	79
图 4.1 车载测试轨迹.....	86
图 4.2 GPS、BDS 和 GPS+BDS 的可见卫星数及其对应的 PDOP 值 (15°截止高度角).....	87
图 4.3 周跳探测决策量序列.....	87
图 4.4 模拟 6 颗不同的卫星 (三颗 GPS 卫星, 三颗北斗卫星) 在 10 个不同的历元同时发生周跳 (红色线为周跳探测决策量阈值).....	88
图 4.5 RTK/INS 紧组合在正常系统状态和有偏系统状态下的位置与参考值的差异以及相对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异 (在历元 186,804 处引入了 1 周模糊度偏差到 G29 卫星).....	89

图 4.6 基于伪距的 GPS/BDS/INS 紧组合位置与参考值的差异以及相对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异.....	90
图 4.7 惯导递推的位置增量与参考值的差异(蓝色曲线) 及其对应的标准差(红色曲线).....	91
图 4.8 三种不同方案的单历元 ADOP 和 Ratio 值序列 (惯导相对约束的 AR 方案使用了两个历元的数据) .....	92
图 5.1 序列影像之间形成的几何约束关系 .....	96
图 5.2 多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合算法框图 (PVA 表示位置、速度和姿态) .....	103
图 5.3 仿真轨迹与特征点分布 .....	104
图 5.4 仿真载体平台的速度 .....	105
图 5.5 IMU 的原始数据输出 .....	105
图 5.6 GNSS/INS 组合导航结果 .....	106
图 5.7 基于已知特征点的视觉/INS 紧组合滤波结果 (前 30 s 为 GNSS/INS 组合).....	107
图 5.8 纯惯导结果 (前 30 s 为 GNSS/INS 组合).....	108
图 5.9 基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波结果 (前 30 s 为 GNSS/INS 组合).....	109
图 6.1 车载测试平台 .....	110
图 6.2 传感器空间关系示意图 .....	112
图 6.3 相机-惯导外参标定 .....	113
图 6.4 车载测试轨迹 .....	114
图 6.5 载体导航状态 .....	114
图 6.6 典型的道路场景 .....	114
图 6.7 提取的 FAST 角点及其跟踪 (红色表示跟踪次数多, 蓝色表示跟踪次数少) .....	115
图 6.8 卫星截止高度角为 15°时 GPS、BeiDou 和 GLONASS 的卫星可见性.....	116
图 6.9 NetR9 接收机 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)的可见卫星数及其对应的 PDOP 值.....	117
图 6.10 NetR9 接收机单频 RTK 定位结果与参考值差异 (GrafNav 8.7) .....	118
图 6.11 纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的位置误差序列 .....	118
图 6.12 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合位置与参考值差异序列.....	119
图 6.13 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合位置与参考值差异序列.....	119
图 6.14 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向	

上的位置标准差（标准差为卡尔曼滤波协方差矩阵对角线元素的平方根） .....	120
图 6. 15 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合位置 误差分布 .....	121
图 6. 16 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合 位置误差分布 .....	122
图 6. 17 纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的速度误差序列 .....	122
图 6. 18 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合速度 误差序列 .....	123
图 6. 19 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合 速度误差序列 .....	123
图 6. 20 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向 上的速度标准差（标准差为卡尔曼滤波协方差矩阵对角线元素的平方根） .....	124
图 6. 21 纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的姿态误差序列 .....	125
图 6. 22 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合姿态 误差序列 .....	126
图 6. 23 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合 姿态误差序列 .....	126
图 6. 24 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合的姿态标准差（标准 差为卡尔曼滤波协方差矩阵对角线元素的平方根） .....	126

# 表目录

表 1.1 GNSS、INS 和视觉三种导航方法优缺点比较 .....	4
表 3.1 IMU 传感器的性能参数 .....	59
表 3.2 GPS/BDS/GLONASS 组合系统在 15°到 40°截止高度角下的平均 DOP 值 .....	60
表 3.3 卫星截止高度角为 15°, 20°, 25°, 30°, 35°和 40°时不同系统单频单历元模糊度固定率 .....	61
表 3.4 卫星截止高度角为 15°时不同系统组合位置差异 RMS 值 .....	63
表 3.5 GPS/BDS/GLONASS RTK/INS 紧组合在 GNSS 信号完全中断 5, 10, 15, 20, 25 和 30 s 时位置漂移误差统计 .....	65
表 3.6 车载测试中使用的 IMU 性能参数 .....	68
表 3.7 GNSS 信号中断时长及其对应的最大位置漂移误差 .....	79
表 4.1 SPAN-CPT 系统中 IMU 的性能参数 .....	86
表 4.2 正常状态和有偏状态下的 RTK/INS 紧组合以及基于伪距的 DGNSS/INS 紧组合对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异统计结果 .....	90
表 6.1 Basler acA1600-20gm 相机参数 .....	111
表 6.2 车载实验中使用的 IMU 传感器性能参数 .....	111
表 6.3 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R) 分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS/视觉紧组合解算的位置与参考值的差异 RMS .....	120
表 6.4 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS/视觉紧组合解算的速度误差 RMS .....	124
表 6.5 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R) 分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS/视觉紧组合解算的姿态误差 RMS .....	127

## 缩略词

ARW	Angular Random Walk
ADOP	Ambiguity Dilution of Precision
BA	Bundle Adjustment
BDS	BeiDou Global Navigation Satellite System
CDMA	Code Division Multiple Access
EKF	Extend Kalman Filter
ECEF	Earth-centered Earth-fixed
FRD	Forward-Right-Down
FDE	Fault Detection and Exclusion
FDMA	Frequency Division Multiple Access
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
GLONASS	GLObal Navigation Satellite System
GEO	Geostationary Earth Orbit
IFB	Inter-Frequency Bias
INS	Inertial Navigation System
IMU	Inertial Measurement Unit
IGSO	Inclined Geosynchronous Earth Orbit
LOS	Line-of-Sight
LAMBDA	Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment
MSCKF	Multi-State Constraint Kalman Filter
MEO	Medium Earth Orbit
MEMS	Micro-Electro-Mechanical-Systems
MMS	Mobile Mapping System
NED	North-East-Down
PTAM	Parallel Tracking And Mapping
PPP	Precise Point Positioning
POS	Position and Orientation System
PDOP	Position Dilution of Precision

RMS	Root Mean Square
RTK	Real-Time Kinematic
RTS	Rauch Tung Striebel
RAIM	Receiver Autonomous Integrity Monitoring
RANSAC	RANdom SAmples Consensus
SLAM	Simultaneous Localization and Mapping
STD	STandard Deviation
VRW	Velocity Random Walk
VIO	Visual-Inertial Odometry
VINS	Vision aided Inertial Navigation System



## 摘要

随着自动驾驶、机器人和无人机等技术的兴起,城市等复杂 GNSS (Global Navigation Satellite System) 环境下的高精度定位定姿需求不断增长。GNSS/INS (Inertial Navigation System) 组合导航能够提供连续、可靠和完备的高精度导航参数,是应用最广的组合导航技术之一。然而,在 GNSS 复杂环境下,基于低成本 MEMS-IMU (Micro-Electro-Mechanical-Systems Inertial Measurement Unit) 的 GNSS/INS 组合导航在 GNSS 信号中断期间导航误差将迅速积累,这无疑降低了系统的可用性。基于相机的视觉导航具有精度高、自主无源等优点,视觉/INS 组合可极大降低 INS 导航误差。但是,视觉/INS 组合无法提供全球框架下的导航信息且误差会随距离累积。因此,将 GNSS、INS 和视觉进行深度信息融合可实现优势互补,获得更优的导航性能。同时,多系统 GNSS 的快速部署将显著改善 GNSS 在复杂环境下的定位精度、可用性等。然而,目前相关研究均基于 GPS (Global Positioning System) RTK (Real-Time Kinematic)解算的位置与视觉/INS 进行融合,无法利用视觉/INS 信息辅助 GPS RTK 解算,而在复杂 GNSS 环境下单独的 GPS RTK 定位可用性非常低,这严重阻碍了组合系统性能的提升及其应用。

针对 GNSS 复杂环境下的低成本高精度定位定姿需求以及当前相关研究的不足,本文开展了单频多系统 GNSS (GPS、BDS 和 GLONASS) RTK/INS/视觉紧组合技术研究,提出了 RTK/INS 紧组合抗差算法以及 INS 相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型,构建了多系统 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型,并通过多组车载实测数据对紧组合算法在复杂 GNSS 环境下的模糊度固定、定位、测速和定姿等方面的性能进行了全面评估与分析。本文的主要研究工作和贡献如下:

1. 为了增强单频 RTK 在复杂动态环境下的高精度定位性能,提出了一套单频多系统 GNSS RTK/INS 紧组合算法模型。首先,建立了多系统 RTK 定位的数学模型;然后,阐述了附加模糊度参数和独立解算模糊度参数的两种 RTK/INS 紧组合数学模型和 INS 辅助模糊度固定方法;同时,针对 GNSS 观测粗差问题,提出了基于滤波新息的两步抗差 RTK/INS 紧组合算法模型;最后,通过两组车载测试数据对 RTK/INS 紧组合算法的性能进行了全面评估与分析。结果表明,在开阔天空环境下进行短基线定位时,单频多系统 GNSS RTK 在模糊度固定和定位精度方面具有显著优势,其中单频多系统 GNSS RTK/INS 在  $35^\circ$  或  $40^\circ$  的截止高度角下的单历元模糊度固定率超过 99%,而且水平和高程动态定位精度均为厘米级;在城市等复杂环境下进行短基线定位时,GNSS 粗差观测值会降低模糊度固定率与可靠性,本文提出的基于滤波新息的两步抗差紧组合算法有效提高了紧组合的模糊度固定率,同时单频多系统 GNSS RTK/INS 紧组合能显著改善

GNSS RTK 在复杂环境下的定位精度和可用性，在模糊度固定和定位性能方面甚至优于双频多系统 GNSS RTK，这充分体现了单频多系统 GNSS 与低成本 MEMS 惯导进行紧组合的巨大优势。

2. 针对传统惯导绝对位置约束辅助模糊度固定方法在系统有偏状态下无法正确固定模糊度的难题，创新性地提出了惯导相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型。首先，根据 IMU 预积分理论给出了 INS 相对位置增量的计算公式，并指出 INS 相对位置增量只需通过 IMU 观测值以及载体初始速度和姿态即可确定，而不需要求解中间状态的绝对导航参数；然后，给出了 INS 相对位置测量值辅助模糊度固定的原理公式，并指出该方法的本质为将动态定位转化为准静态定位；同时，为了使得该方法能有效用于模糊度固定，提出了一种 INS 相对位置增量辅助周跳探测的方法，该周跳探测方法在组合系统位置状态有偏差时仍能有效探测周跳；最后，通过实测车载数据对所提出的算法的有效性和性能进行了验证和评估。实验结果表明，INS 相对位置增量辅助周跳探测方法可以有效探测 1 周的小周跳（数据间隔为 1 s）；在 RTK/INS 紧组合绝对位置有偏的情况下 INS 仍能提供高精度的相对位置测量值，因此 INS 相对位置增量仍能用于辅助模糊度固定；对于开阔环境下采集的单频 GPS+BDS 数据，新算法模型能获得与传统 INS 绝对位置约束辅助的模糊度解算模型相当的模糊度固定性能。

3. 为了解决基于低成本 MEMS-IMU 的 GNSS/INS 组合导航在 GNSS 信号中断期间导航误差快速漂移的问题，研究了基于已知特征点和基于多状态约束的两种视觉/INS 紧组合滤波模型。对多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波模型与最小二乘估计的等价性进行了证明，指出了量测方程两边同时左乘特征点坐标对应的系数矩阵的零空间矩阵的合理性。最后，阐述了将视觉/INS 与 RTK/INS 紧组合滤波模型统一为 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型的方法，且设计了仿真实验对两种视觉/INS 紧组合滤波模型进行了验证和分析。结果表明，基于已知特征点的视觉/INS 紧组合算法可以获得无误差漂移的位姿估计结果，且航向精度相对于 GNSS/INS 组合导航得到明显提高；基于多状态约束的视觉/INS 紧组合算法能极大地减小 INS 的位置和航向漂移，这将有效弥补 GNSS/INS 组合导航在航向可观性弱的条件下航向角快速发散的缺陷。

4. 自主设计和搭建了含有 GNSS、IMU 和单目相机的硬件验证平台，完成了传感器之间的时间和空间同步，在此基础上开展了 GNSS 复杂环境下的实测车载测试，并对单频多系统 GNSS RTK/INS 紧组合与 RTK/INS/视觉紧组合在定位、测速和定姿等方面的性能进行了评估和对比分析。实验结果表明，多系统 GNSS 和视觉均显著地提高了单 GPS RTK/INS 紧组合在复杂 GNSS 环境下的厘米级定位可用性。在测速方面，RTK/INS/视觉紧组合的速度误差没有漂移，可以提供高精度速度信息。在定姿方面，RTK/INS/视觉紧组合可以完全维持横滚角、俯仰角的精度并且有效地降低航向角的误差漂移速度进

而提高其估计精度。由此可见，单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合技术可作为 GNSS 复杂环境下的低成本高精度定位、测速和定姿的一种有效解决方案。

综上所述，本文对单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合技术进行了深入研究，构建了完整的 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型，并通过多组实测车载实验对提出的算法模型进行了全面验证和分析。本文的研究成果将有效促进复杂 GNSS 环境下的低成本高精度定位定姿技术的研究、产业应用和发展。

**关键词：**多系统 GNSS；高精度位姿估计；单频 RTK/MEMS-IMU 紧组合； GNSS 复杂环境；惯导相对约束；模糊度解算；单目视觉/惯性里程计；RTK/INS/视觉紧组合

## ABSTRACT

With the rapid development of self-driving cars, autonomous robots, and Unmanned Aerial Vehicles (UAVs), the demand for precise position and attitude has been increasing in urban environments. The integration of Global Navigation Satellite System (GNSS) and Inertial Navigation System (INS) can provide continuous, reliable, and complete navigation solution, which has become one of the most widely used integrated navigation techniques. However, the navigation errors of the GNSS/INS integration will be increased dramatically during the GNSS outages for the low-cost Micro-Electro-Mechanical-System (MEMS) Inertial Measurement Units (IMUs), which definitely restricts the system availability. In order to navigate in GNSS-denied environments, the monocular visual-inertial system has been widely adopted in robotics community due to the complementary characteristics and low-cost hardware. However, the visual-inertial system can not provide the absolute navigation information in a global reference frame, and it suffers from navigation error accumulation. Therefore, the integration of GNSS, INS and vision could be developed to take the most of their advantages to obtain better navigation performance. Meanwhile, the rapid deployment of the multi-constellation GNSS (multi-GNSS) will greatly improve the positioning accuracy and availability in GNSS challenged environments. However, the most relevant existing research focus on the integration of the vision, INS, and the position measurement from the Global Positioning System (GPS) Real-time Kinematics (RTK). It is well-known that this kind of integration has the drawback that the information from the visual-inertial system can not be used to aid RTK. Furthermore, the positioning capability of GPS RTK is very poor in GNSS challenged environments, which seriously restrict the performance and application of the integrated navigation system.

In order to overcome the limitations of the existing research and meet the demand of high-accuracy position and attitude determination in GNSS challenged environments, this thesis conducts systematic and in-depth research on the algorithm of the tightly coupled integration of the single-frequency multi-GNSS (GPS, BDS, and GLONASS), MEMS-IMU, and monocular camera. The innovation-based outlier-resistant algorithm and INS-derived relative constraint for ambiguity resolution algorithm are proposed specifically for the tightly coupled RTK/INS integration, and the complete filtering model of the tightly coupled single-frequency multi-GNSS RTK/INS/Vision integration is constructed. Finally, the performance in terms of

the ambiguity resolution, positioning, velocity and attitude determination is evaluated and analyzed comprehensively by using multiple sets of field vehicular data. The main research content and contributions of this thesis are summarized as follows:

1. In order to enhance the high-accuracy positioning performance of single-frequency RTK in complex kinematic environments, the tightly coupled single-frequency RTK/INS integration algorithm is proposed. To begin with, the mathematic model of multi-GNSS RTK positioning was established, and then two mathematic models of RTK/INS integration were presented and discussed, together with the ambiguity resolution with inertial aiding. Secondly, the innovation-based outlier-resistant ambiguity resolution (AR) and Kalman filtering strategy is proposed specifically for the RTK/INS integration to resist the measurement outliers or poor-quality observations. Finally, the performance of the tightly coupled RTK/INS integration is evaluated and analyzed comprehensively by using filed vehicular test data in both open-sky and sub-urban environments. The results indicate the empirical success rate of single-epoch ambiguity resolution for the tightly-coupled single-frequency multi-GNSS RTK/INS integration is over 99% even at elevation cut-off angles of  $35^\circ$  or  $40^\circ$  for short baselines in open-sky conditions, and centimeter-level positioning accuracy can also be achieved in both horizontal and vertical directions. For short baselines in sub-dense urban environments, results reveal that the outlier-resistant strategy is effective to improve the ambiguity fixing rate, and the tightly-coupled single-frequency multi-GNSS RTK/MEMS-IMU integration can greatly improve the positioning accuracy and availability of GNSS RTK, and even outperforms the dual-frequency multi-GNSS RTK in terms of AR and positioning performance. It demonstrates the superior advantages that the tightly coupled integration of the single-frequency multi-GNSS RTK and low-cost MEMS-IMU has.

2. The traditional method that uses INS-predicted absolute position to aid ambiguity resolution has the limitation that the correct ambiguity resolution will be impossible in case of biased system state. In this thesis, a new INS aided ambiguity resolution approach using INS-derived relative constraint is proposed to overcome this limitation. To begin with, we derive the formula for calculating the INS-derived relative position increment based on the IMU pre-integration theory. Then, the formula for the INS aided ambiguity resolution using INS-derived incremental position measurement is derived. Meanwhile, cycle slip detection with INS-derived phase increment is developed to make the new approach feasible. Finally, the effectiveness and performance of the proposed algorithm is validated and evaluated by a field vehicular test. The results indicate that it is effective for the cycle slip detection method to detect all the real and

simulated small cycle slips like one cycle (data interval is 1 s), and the high-accuracy INS-derived incremental position measurement can still be obtained in the case of biased system state, and the new method can achieve comparable ambiguity resolution performance in comparison with the traditional method for the single-frequency GPS+BDS RTK/INS integration.

3. In order to address the problem of the rapid navigation error accumulation during GNSS outages for the low-cost MEMS-IMU based GNSS/INS integration, the thesis presents two kinds of vision aided INS methods, namely the tightly coupled Vision/INS integration with known features and with multi-state constraint. We prove that the multi-state constraint Kalman filter is optimal from the perspective of least-squares estimation theory. Then the method to unify the tightly coupled RTK/INS integration model and Vision/INS integration model is presented, and finally, the two tightly coupled integration models are validated and analyzed with simulated data. The results show that the tightly coupled vision/INS integration algorithm can achieve drift-free pose estimation, and the heading accuracy is improved obviously in comparison with the GNSS/INS integration. Besides, the multi-state constraint Kalman filter algorithm greatly reduces the position and heading drift error of the INS, which effectively makes up for the drawback that the GNSS/INS integration has weak heading observability under certain conditions.

4. We design and establish the hardware platform that is made up of the GNSS, IMU, and monocular camera, and the space and time synchronization between these sensors is implemented. Then, a field vehicular experiment was conducted in GNSS challenged environments to evaluate and analyze the performance of the tightly coupled RTK/INS/Vision integration in terms of position, velocity and attitude. The results reveal that both multi-GNSS and vision contribute to the centimeter-level positioning availability significantly in GNSS challenged environments. Meanwhile, the velocity and attitude accuracy can be greatly improved by using the tightly-coupled multi-GNSS RTK/INS/Vision integration, especially for the yaw angle. Therefore, the tightly coupled single-frequency multi-GNSS RTK/INS/Vision integration can be considered as an effective solution to provide precise position, velocity and attitude information in GNSS challenged environments.

In summary, this thesis conducts systematic and in-depth research on the tightly coupled single-frequency multi-GNSS RTK/INS/Vision integration algorithm, build complete filtering model for the tightly coupled RTK/INS/Vision integration, and evaluate the proposed model comprehensively by multiple field vehicular tests. The proposed methods in this thesis will

boost the research, application, and development of the technology for precise determination of position and attitude in GNSS challenged environments.

**Key Words: Multi-GNSS; Precise Pose Estimation; Tightly Coupled Integration of Single-frequency RTK and MEMS-IMU; GNSS Challenged Environments; INS-derived Relative Constraint; Ambiguity Resolution; Monocular Visual-Inertial Odometry; Tightly Coupled RTK/INS/Vision Integration**

# 1 绪论

## 1.1 研究背景与意义

随着人类社会的进步和科技的迅速发展, 导航定位技术在人类的社会、经济和军事活动中越来越发挥着重要的支撑作用(杨元喜, 2015)。由于导航定位技术被广泛应用于军事和民用领域, 因此学术界和工业界对其相关的研究和技术发展一直保持密切关注。随着自动驾驶、无人机和机器人等技术的兴起, 高精度、高可靠性、高可用性的低成本导航定位需求得到空前增长。相应地, 导航定位技术也得到不断地发展和进步, 在导航定位精度、连续性、可靠性和可用性等方面均得到显著提升。

在众多的导航定位技术中, 以美国的全球定位系统(Global Positioning System, GPS)为代表的卫星导航定位技术因其能在全全球范围内为用户提供全天候的高精度位置、速度和时间信息(Position, Velocity and Timing, PVT)而被广泛关注和应用(Parkinson and Spilker, 1996; Hofmann-Wellenhof et al., 2007; 李征航和黄劲松, 2010)。由于GPS具有长期定位精度高、误差不随时间积累、全天时和全天候等诸多优点(Leick, 2004), 因此被广泛应用于智能交通、移动测图、形变监测、精细农业、车载导航、航空摄影测量以及军事武器制导等诸多领域(罗建军 et al., 2001; 孙红星, 2004; 胡友健 et al., 2006; 陈允芳和叶泽田, 2007; 房建成 et al., 2007; 袁修孝 et al., 2007)。然而, 卫星导航技术是一种依赖于无线电的被动式导航技术, 这就决定了GPS信号容易受到遮挡和干扰, 进而影响定位的精度、连续性和可靠性。此外, GPS还有如下缺点: 观测量受周围环境影响明显且高频噪声大等(Kleusberg and Teunissen, 1996; Groves, 2013)。

考虑到GPS在民用领域中表现出的巨大经济效益以及在军事上体现出的国防安全性, 部分国家陆续开展了各自的卫星导航系统的研究与建设, 包括俄罗斯的GLONASS全球导航卫星系统、欧盟的Galileo全球导航卫星系统、中国的北斗导航卫星系统(BeiDou 或 BDS)、印度的IRNSS (India Regional Navigation Satellite System)区域卫星导航系统和日本的准天顶卫星导航系统(QZSS, Quasi Zenith Satellite System)。除了美国的GPS和俄罗斯的GLONASS可为全球用户提供导航定位服务外, 2018年12月27日, 中国的北斗导航卫星系统也开始提供全球定位服务, 欧盟的Galileo系统也计划将于2020年建成具有全球服务能力的卫星导航系统(Montenbruck et al., 2014)。总体而言, 随着上述各卫星导航系统的快速部署, 单GPS系统将向多星座导航卫星系统(Multiple-Constellation Global Navigation Satellite System, Multi-GNSS)发展。相较于单GPS系统而言, 多系统GNSS将大大增加可用卫星数并显著改善定位的PDOP (Position Dilution of Precision)分布, 从而极大地改善定位的精度、可用性、可靠性和



连续性等(Cai et al., 2013; Odolinski et al., 2014; Gao et al., 2016; 柴洪洲 et al., 2016; 姚宜斌 et al., 2016; Li et al., 2017), 这对于在城市等复杂 GNSS 环境中的定位而言具有重要意义(Teunissen et al., 2013; Li et al., 2018; Li et al., 2019)。然而, 在诸如城市峡谷、隧道等极为恶劣的观测环境中, 多系统 GNSS 的定位精度也会大幅度降低甚至无法给出定位结果。因此, 如何增强 GNSS 在此类环境下的导航定位性能, 是进一步推广 GNSS 应用的关键科学问题。

惯性导航系统 (Inertial Navigation System, INS) 是一种以牛顿定律为基础的完全自主的导航系统, 它通过内部的惯性测量单元 (Inertial Measurement Unit, IMU) 测量载体的角速度和加速度信息, 然后通过数学积分计算获得载体的位置、速度和姿态等导航信息(Savage, 2000; Shin, 2005)。惯性导航系统具有自主工作、导航参数完备、短期精度高和数据率高 (一般至少 100 Hz) 等优点, 已被广泛应用于航空、航海、导弹制导、车载导航和移动测量等诸多军事和民用领域(Chatfield, 1997; 张国良 et al., 2004; Britting, 2010)。然而, 受 IMU 传感器误差的影响, INS 导航误差会随着时间迅速累积, 因此无法提供长时间的高精度导航信息(Titterton and Weston, 2004; Shin, 2005; Jekeli, 2012)。

由于 GNSS 和 INS 之间具有优良的互补特性, 将 GNSS 和 INS 信息有效融合可实现优势互补, 从而大幅度提高各自的导航性能, 因此 GNSS/INS 组合导航也成为导航领域中被广泛应用的组合导航技术之一(袁信, 1993; 董绪荣 et al., 1998; Petovello, 2003; Angrisano, 2010; Groves, 2013)。在相互辅助方面, GNSS 测量信息可对 INS 导航误差进行精确校正, 同时也可以对惯性传感器的误差进行在线估计和补偿, 从而提高 GNSS 短时中断情况下 INS 的导航精度; 而 INS 提供的短期高精度导航信息可用于辅助 GNSS 的周跳探测、模糊度固定以及提高接收机的信号跟踪能力和抗干扰性等(Altmayer, 2000; Scherzinger, 2000; Lee et al., 2003; Petovello et al., 2004; 张提升, 2013; 张全, 2015; Li et al., 2017)。目前, GNSS/INS 组合导航技术已被广泛应用于航空航海、移动测绘、轨道测量、军事武器等众多领域 (图 1.1), 特别是随着微机械传感器 (Micro-Electro-Mechanical-Sensor, MEMS) 技术的迅速发展, 采用低成本 MEMS IMU 的 GNSS/INS 组合导航技术进一步拓宽了应用领域 (图 1.1), 如车载导航、行人导航、无人机、机器人等众多领域(Godha, 2006; Angrisano, 2010; Groves, 2013; Falco et al., 2014; Kuang et al., 2018)。

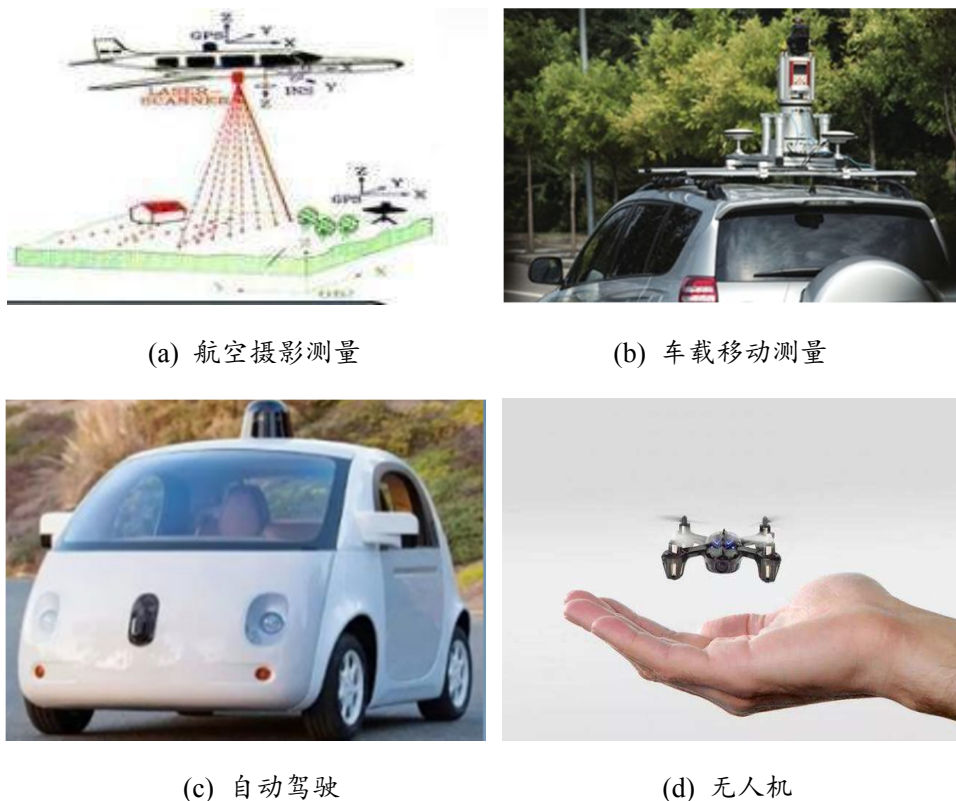


图 1.1 组合导航的典型应用

虽然 GNSS/INS 组合在诸多领域中得到成功应用,但是 GNSS/INS 组合导航只能在短时间的 GNSS 中断情况下维持较高的导航精度,而在较长时间的 GNSS 信号中断后导航误差将会迅速累积,特别是对于低成本的 MEMS 惯导,导航误差发散更为严重(Shin, 2005; Gao et al., 2017)。随着城市的快速发展,城市环境下的高精度定位需求得到显著增长。然而,在城市环境中,GNSS 信号不可避免地被树木、高架桥、建筑物以及隧道等遮挡,这时 GNSS/INS 组合系统的导航定位精度将会严重下降。在 GNSS 复杂环境下要获取高精度、高可靠性且连续的导航定位信息,一种可行的方法就是进行多传感器融合,典型的传感器包括 IMU、气压计、磁力计、里程计、相机等(Grejner-Brzezinska et al., 2016)。其中,由于相机具有自主无源、信息丰富、定位精度高、功耗低和廉价等诸多优点,近些年基于相机的视觉导航技术在机器人和计算机视觉领域得到了广泛研究和应用(Scaramuzza and Fraundorfer, 2011; Fraundorfer and Scaramuzza, 2012)。一般来讲,在 GNSS 观测恶劣的城市环境中视觉特征往往非常丰富,这时视觉导航具有明显的优势;而在视觉特征很少的室外环境中,GNSS 一般具有很好地信号跟踪质量,此时 GNSS/INS 组合导航就可以提供高精度的导航定位。此外,单目相机和低成本 MEMS-IMU 也具有优良的互补特性,二者的融合可以极大地提高定位系统的精度和鲁棒性。一方面,IMU 可以有效解决单目视觉的尺度缺失问题并且能提高视觉运动跟踪能力(Hwangbo et al., 2009; Kelly and Sukhatme, 2011);另一方面,视觉观测可以极大地减少低成本 MEMS-

IMU 的误差漂移(Roumeliotis et al., 2002; Mourikis and Roumeliotis, 2007)。表 1.1 给出了 GNSS、INS 和视觉三种导航方法的优缺点比较。显然,这三种导航技术之间具有极好的互补性,将 GNSS、INS 和视觉进行融合能克服各传感器自身的缺陷,实现优势互补。因此,对 GNSS/INS/视觉组合导航技术开展深入研究具有重要的意义和价值。

表 1.1 GNSS、INS 和视觉三种导航方法优缺点比较

	优点	缺点
GNSS	全球全天候 定位精度高 误差不随时间积累	短期噪声大 信号易受干扰
INS	完全自主 导航参数完备 数据率高 短期精度高	误差随时间累积 低成本惯导误差发散快
视觉 里程计	自主无源 成本低 图像信息丰富 定位精度高	误差随距离累积 单目视觉缺乏尺度 易受光照、环境特征影响

当前,地面移动测量系统仍然主要使用 GNSS/INS 组合导航系统为其移动平台提供位置和姿态信息,又称之为移动平台的定位定向系统(Position Orientation System, POS)或者直接地理参考(Direct Georeferencing, DG)(孙红星, 2004; 房建成 et al., 2007)。然而,在城市环境中 GNSS 信号不可避免地会被遮挡和干扰,基于 GNSS/INS 组合导航技术的 POS 方案的定位定姿性能将会显著下降,POS 输出的定位定姿结果的可靠性也无法得到保证。为了改善 POS 的精度,实践中通常搭载昂贵的高精度惯导系统,以致于极大地增加了设备成本。本文利用视觉影像的信息来提高 GNSS/INS 组合导航系统在 GNSS 受限环境下的定位定姿能力,这对于降低 POS 系统成本、提高 POS 的精度和可用性等均具有重要的实际价值和意义。

近年来炙手可热的无人驾驶、无人机测图和机器人技术均对低成本的分米级甚至厘米级高精度定位需求迫切,然而基于载波相位的实时动态差分定位(Real-time Kinematic, RTK)技术只有在 GNSS 观测较好的环境下才能实现稳定可靠的厘米级高精度定位。RTK 实现厘米级高精度定位的前提是正确地固定载波相位整周模糊度(Ambiguity Resolution, AR),相关研究表明:对于短基线而言,双频 GPS RTK 技术在开阔天空环境下可以快速甚至单历元解算整周模糊度(Deng et al., 2013; He et al., 2014)。相较而言,单频 GPS RTK 的模糊度固定率一般较低,不过随着多系统 GNSS 的使用,单频多模

GNSS RTK 的模糊度固定率、可用性和可靠性等可以得到显著改善(Carcanague et al., 2013; Teunissen et al., 2013; He et al., 2014; Odolinski et al., 2014; Zhao et al., 2014; 隋春玲 et al., 2015; Li et al., 2017; Odolinski and Teunissen, 2017; 马丹 et al., 2017)。此外, 采用单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合技术有望进一步提高单频多模 GNSS RTK 在城市等复杂 GNSS 环境下的高精度定位能力。一方面, 多模 GNSS 提供了更多的可用卫星数并改善了空间几何构型; 另一方面, INS 的短期高精度信息可以用来辅助 GNSS 的数据预处理(如粗差探测、周跳探测等)和模糊度固定。加入视觉辅助信息可以极大地减少低成本 MEMS 惯导在 GNSS 中断期间的误差漂移, 这将进一步增强 INS 对 GNSS 的辅助作用。单频接收机具有价格便宜而且功耗低等优点, 特别适合于手机、微小型无人机这类对功耗要求极高的导航应用平台, 因而单频接收机的潜在应用比多频 GNSS 接收机更加广泛。在多系统 GNSS 快速发展和城市复杂环境下精密导航定位需求不断增加的背景下, 开展单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合以及对应的 RTK/INS/视觉紧组合算法模型的研究具有重要的实际意义和应用价值。

随着导航技术的快速发展, 单一传感器的导航定位系统已经无法满足未来的导航定位系统在任何环境下的高精度、高可用性、高可靠性且低成本的导航定位需求。基于多传感器的融合导航技术可充分发挥各传感器的优势, 进而增加系统的冗余度、提高系统容错能力和信息的可信度, 最终提升系统的整体性能(杨元喜, 2006)。多传感器融合导航为未来导航定位技术的需求提供了一种解决途径, 是未来导航定位技术发展的趋势, 本文研究的 GNSS/INS/视觉紧组合技术将为多源信息融合的高精度位姿估计研究提供一种新的参考思路。

## 1.2 相关技术研究现状

GNSS RTK/INS/视觉紧组合技术研究涉及到 GNSS 精密定位、GNSS/INS 组合导航和视觉/INS 组合导航等研究领域, 因此本文先从以上三个方面阐述相关技术的研究现状并分析当前研究中存在的问题, 最后对融合 GNSS、INS 和视觉三种信息的组合导航技术研究现状进行总结和分析。

### 1.2.1 GNSS 精密相对定位技术研究现状

自从卫星导航系统开始服务于人类开始, 经过几十年的发展, 卫星导航定位技术在定位方法、定位性能等方面取得了长足的进步。到目前为止, 卫星定位技术分别经历了多普勒定位、标准伪距单点定位、伪距差分定位、精密相对定位 RTK、精密单点定位、网络 RTK 等。由于伪距的精度较低且受到轨道和大气误差等影响, 标准单点定位的精度约为 10 m (Alkan, 2001)。伪距差分定位通过接收基准站提供的差分改正数可以消除

空间相关性误差，其定位精度可达米级甚至分米级(Landau et al., 2009)。由于伪距差分定位的精度与成本不匹配，因此其应用范围非常有限。然而，要获取高精度厘米级定位，必须利用载波相位观测值进行定位解算，其中 RTK 和网络 RTK 技术是目前广泛使用的能提供实时厘米级高精度定位的技术(陈小明, 1997; 唐卫明, 2006)。RTK 通过基准站和流动站的观测数据构建双差观测值来消除绝大部分公共误差，然后采用模糊度固定算法求解双差模糊度，进而实现精密定位。其中，正确可靠地固定双差模糊度是 RTK 实现高精度厘米级定位的关键，众多学者对模糊度解算问题展开了深入研究并提出了一系列模糊度搜索算法，主要包括三类：观测值域内的双频码相组合法(Hatch, 1983; Melbourne, 1985; Wübbena, 1985)、坐标域内的模糊度函数法(Counselman and Gourevitch, 1981)，模糊度域内的最小二乘搜索法(Hatch, 1991)、模糊度快速解算法(Frei and Beutler, 1990)和最小二乘模糊度降相关平差法(Least-square ambiguity decorrelation adjustment, LAMBDA)(Teunissen, 1995)等。其中，LAMBDA 方法被广泛应用与 GNSS 精密定位中，本文将采用该方法进行模糊度固定。

GPS 双频 RTK 作为一种高精度定位技术在短基线情况下能够快速甚至瞬时固定双差模糊度从而实现高精度厘米级定位(Deng et al., 2013; He et al., 2014)。相较而言，GPS 单频 RTK 的模糊度固定率和可靠性较低(Carcanague et al., 2013)。随着多系统 GNSS 的部署，单频 RTK 的模糊度固定率和可靠性可得到大幅度提高(Verhagen et al., 2012; Carcanague et al., 2013; Teunissen et al., 2013; He et al., 2014; Odolinski et al., 2014; 隋春玲 et al., 2015; Odolinski and Teunissen, 2016; 张康 et al., 2016; Li et al., 2017; Odolinski and Teunissen, 2017; 马丹 et al., 2017; Li et al., 2018)，这将使得利用单频 RTK 实现快速高精度定位成为可能。与双频 GNSS 接收机相比，单频 GNSS 接收机具有价格便宜而且功耗低等优点，因而单频接收机具有更加广泛的应用市场。

目前，多数研究均利用开阔天空环境下采集的静态或动态数据来评估 RTK 的模糊度固定和定位性能，有关复杂环境下的动态测试与验证的成果较少。然而，GNSS 实际应用中，观测环境是复杂多变的，GNSS 信号通常会被频繁遮挡，这无疑会降低 RTK 的可用性、精度和可靠性等。因此，如何增强 RTK 在 GNSS 复杂环境下的动态定位性能，是进一步推广其应用的关键问题。

### 1.2.2 GNSS/INS 组合导航技术研究现状

为了改善 GNSS 的定位性能，通常将 GNSS 与 INS 进行组合实现优势互补，从而提高导航定位的精度、可用性和可靠性等。GNSS/INS 组合从组合方式上可以分为基于 GNSS 定位结果的松组合、基于 GNSS 原始观测量的紧组合和基于 GNSS 接收机信号层面的深组合(Farrell and Barth, 1999; Groves, 2013)。松组合中使用 GNSS 独立解算的位

置和速度与 INS 预测的位置和速度的差值作为滤波更新的测量值，而紧组合则使用 GNSS 接收机输出的原始伪距、伪距率和载波相位等观测值与 INS 预测的相应观测值的差值作为滤波更新的测量值。显然，紧组合的组合层次更深，而且可以有效利用不足 4 颗卫星的测量信息，因此紧组合在 GNSS 观测受限的环境中较松组合有明显优势(Falco et al., 2017)。由于松组合和基于伪距、伪距率的紧组合数学模型和实现较为简单，国内外众多学者对其展开了研究(Knight, 1997; 董绪荣 et al., 1998; Wendel and Trommer, 2004; Nassar and El-Sheimy, 2005; Shin, 2005; Godha and Cannon, 2007; Niu et al., 2015; 张全, 2015)。

与基于伪距、伪距率的 GNSS/INS 紧组合相比，基于载波相位观测值的 GNSS RTK/INS 紧组合由于需要解算载波相位整周模糊度参数，因此更加复杂。Grejner-Brzezinska et al. (1998)较早地开展了差分 GPS/INS 紧组合的研究，实现了 INS 辅助模糊度在航解算并获得了厘米级高精度定位，而且成功地将其应用于移动测图和航空摄影测量方面。Scherzinger (2000)设计了惯导辅助的 RTK 紧组合结构，实测数据表明惯导可以极大地提高 GNSS 中断后 RTK 模糊度的重收敛速度。Farrell et al. (2000)实现了实时载波相位差分 GPS/INS 紧组合系统用于车辆控制，该系统可获得 100 Hz 的状态估计且定位精度达到厘米级。Petovello et al. (2004)考察了战术级 IMU 对高精度 GPS/INS 紧组合带来的优势，包括 GPS 中断后的位置、速度误差以及模糊度重收敛时间等。Monikes et al. (2006)提出了一种采用固定区间平滑处理 GNSS、INS 数据的后处理 GNSS/INS 紧组合方法，该方法通过对数据进行正反向处理有效提高了模糊度固定率。孙红星 (2004)在其博士论文中详细研究了载波相位差分 GPS/INS 组合数据处理模型，并对其在移动测图中的性能进行了评估。谢宏飞 et al. (2013)通过 ADOP (Ambiguity Dilution of Precision) 值分析了不同 INS 位置精度对 GPS 模糊度解算的影响，指出 INS 辅助可提高 GPS 模糊度解算的精度和可靠性。郝万亮和孙付平 (2015)设计了主次两个卡尔曼滤波器实现了 GPS RTK/INS 高精度 POS 算法。

上述针对 GPS RTK/INS 紧组合的研究主要围绕 INS 辅助模糊度固定和 GPS RTK/INS 紧组合性能评估展开，相关的算法模型已基本成熟。此外，在 RTK/INS 紧组合中 INS 的先验信息还可以用于辅助 GPS 载波相位周跳探测(Colombo et al., 1999; Altmayer, 2000; Lee et al., 2003)。在多模 GNSS/INS 紧组合方面，Han et al. (2015)研究了基于载波相位差分的双频 GPS/BDS/INS 紧组合算法模型，结果表明双模紧组合显著地提高了模糊度固定和重收敛性能，特别是在较高的截止高度角情况下。近年来，基于低成本的 GPS 单频接收机和 MEMS 惯导的 RTK/INS 紧组合研究及其应用开始受到关注(Falco et al., 2014; Eling et al., 2015; Zhao et al., 2016; Dorn et al., 2017; Falco et al., 2017)。相较于 GPS/INS 松组合，紧组合的优势主要体现在复杂环境下的导航定位能力，

研究人员也对 GPS RTK/INS 紧组合在城市等复杂环境下的导航性能进行了评估(Hide and Moore, 2005; Zhao et al., 2016)。由于单 GPS 系统在复杂环境下的可用卫星数非常有限, 因此上述研究中基本无法获得厘米级固定解而且在 GPS 信号中断期间定位误差迅速积累。

在 GNSS 复杂环境下, 多路径误差将会严重影响 GNSS 伪距观测值的精度(Carcanague et al., 2013), 而伪距粗差观测值则会直接影响模糊度等参数的正确估计(Verhagen and Odijk, 2007)。因此, 在 GNSS 复杂环境下必须对伪距粗差进行合理建模, 从而保证 GNSS/INS 组合系统的可靠性。Teunissen(1990)针对组合导航系统的粗差问题构造了检验统计量并提出了探测(Detection)、确认(Identification)和调整(Adaptation)的建模策略。Clark and Bevly(2008)提出了基于卡尔曼滤波新息的粗差探测与剔除方法用于解决伪距 GPS/INS 紧组合在遮挡环境下的观测粗差问题。Hewitson and Wang(2007)将接收机自主正直性监测(Receiver Autonomous Integrity Monitoring, RAIM)方法扩展到 GNSS/INS 组合导航算法中。韩厚增(2015)针对伪距粗差问题引入了 IGG III 抗差估计函数并构建了 INS 辅助单频 GPS/BDS 模糊度解算抗差模型, 通过模拟粗差的实验证明了 INS 辅助的模糊度解算抗差算法能有效提高模糊度固定率。但是, 论文中提出的最小二乘迭代的粗差剔除方法在卫星数较少时会失效, 而且采用模拟粗差的方式得到的是理想情况下的结果, 并不能反映实际复杂情况下的抗差效果。

从上述研究现状中可以看出, 基于单 GPS 系统的 RTK/INS 紧组合在算法模型及其性能评估等方面的研究已基本成熟, 但是在 RTK/INS 紧组合研究方面还存在如下问题需要进一步深入研究: (1) 缺乏针对厘米级高精度 RTK/INS 紧组合的有效质量控制方法以及算法在复杂环境下的实测验证; (2) 单频 GPS RTK/INS 在复杂 GNSS 环境下模糊度固定率低的问题; (3) 在复杂 GNSS 环境中, 基于低成本 MEMS-IMU 的 GNSS/INS 组合在无 GNSS 信息辅助期间导航误差迅速积累问题; (4) 在组合系统状态有偏时, 使用绝对位置约束(有偏)的传统 INS 辅助模糊度固定方法将阻碍模糊度正确固定甚至导致滤波发散, 目前该问题还未引起同行的充分关注。(5) 目前针对单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合算法模型的研究非常有限, 而且缺乏多模 RTK/INS 紧组合在城市等复杂 GNSS 环境下的高精度定位研究。

### 1.2.3 视觉/INS 组合导航技术研究现状

相机和 IMU 具有优良的互补特性使得其特别适合于移动机器人导航, 而且两者的融合能极大地改善导航系统的估计精度、可靠性和稳定性, 因此视觉/INS 组合导航技术成为了机器人领域的研究热点。早期的视觉/INS 融合方案是基于滤波的方法实现的(Mourikis and Roumeliotis, 2007; Jones and Soatto, 2011; Kelly and Sukhatme, 2011; Li and

Mourikis, 2013; Hu and Chen, 2014; Clement et al., 2015; Wu et al., 2015), 后来随着计算平台性能的提升以及基于非线性优化的视觉导航技术的发展, 基于非线性优化的视觉/INS 融合方案也很快得到应用(Indelman et al., 2013; Leutenegger et al., 2015; Shen et al., 2015; Mur-Artal and Tardos, 2016; Forster et al., 2017; Liu et al., 2018; Qin et al., 2018; Schneider et al., 2018)。由于视觉里程计 (Visual Odometry, VO) 与同步定位与制图 (Simultaneous Localization and Mapping, SLAM) 技术是视觉/INS 组合导航技术研究的基础, 因此下面先对主要的 VO 和 V-SLAM 技术方案进行简单地介绍。

### (1) 视觉里程计和视觉 SLAM 技术

在未知环境下利用视觉进行导航的技术主要包括视觉里程计和视觉 SLAM 技术。其中, 视觉里程计是通过对相机获取的序列影像进行处理来估计自身运动的技术, 而视觉 SLAM 则是在自身定位的同时对周围环境进行建图的技术。由于视觉里程计中也会构建局部地图用于更精确地估计自身的运动, 因此视觉里程计可认为是视觉 SLAM 系统的一个模块。二者的本质区别在于视觉里程计只关注运动轨迹的局部一致性, 而视觉 SLAM 关注全局地图的一致性(Scaramuzza and Fraundorfer, 2011)。

视觉里程计的研究源于 20 世纪 80 年代美国国家航空航天局开展的火星探索计划, 一些学者研究了行星探测车的位姿估计问题(Moravec, 1980; Matthies and Shafer, 1987; Olson et al., 2000)。Moravec (1980)首次给出了视觉运动估计流程, 而且还提出了一种早期的角点探测算子, 称为 Moravec 角点探测算子。Moravec 在行星探测车上配置了一个在轨道上滑动的单目相机装置, 以走走停停的方式在每个位置采集和分析图像, 且每次等间隔地采集 9 帧图像。然后利用 Moravec 算子提取角点并沿着核线通过归一化互相关算法匹配其余 8 帧图像。最后通过配准相邻位置三角化后的三维点来恢复相机的位姿。后续的一些学者对上述工作进行了拓展和改进, 比如采用双目相机和 Forster 角点等(Olson et al., 2000)。上述研究工作都是利用立体图像对通过三角化得到 3D 点, 然后通过求解 3D 点到 3D 点的配准问题来获得相对运动估计。与上述方法不同, Nister 等人提出了一种新的位姿估计方法并首次给出了“视觉里程计”的概念(Nister et al., 2004), 同时还将误匹配点剔除算法整合到运动估计过程中并进行了实时算法的实现。后续有许多视觉里程计研究都采用了这套算法流程, 并会根据应用场景的不同对算法进行改进从而提高位姿估计的精度。

早期的视觉 SLAM 系统通常是基于滤波理论框架来实现, 它将系统在每个时刻的状态建模为服从高斯分布的概率模型, 然后利用滤波器对系统状态进行更新(Strasdat et al., 2012)。2007 年, Davison 教授基于扩展卡尔曼滤波器构建了第一个真正意义上能实时运行的单目视觉 SLAM 系统 MonoSLAM(Davison et al., 2007), 因为之前的视觉 SLAM 基本上只能离线地定位与建图。MonoSLAM 将当前相机的位姿和所有路标点的三维坐



标作为滤波状态向量，并以跟踪到的特征点为观测量对系统状态进行滤波更新。由于视觉 SLAM 通常是非线性的，因此采用 EKF 进行状态估计容易产生线性化误差，而且该误差还会向后传递导致误差累积。此外，由于路标点数量众多，将路标点的三维坐标放入滤波器的状态向量中会使得运算量剧增（协方差矩阵为稠密矩阵且维数高）。因此，MonoSLAM 无法应用于大范围场景。

基于非线性优化的方法将视觉 SLAM 构建为非线性最小二乘问题，然后通过迭代优化的方式进行求解。Klein and Murray (2007)于 2007 年提出了著名的基于关键帧非线性优化的视觉 SLAM 系统，它将跟踪 (Tracking) 和建图 (Mapping) 分成两个独立的线程并行执行，这样后端可以使用 BA (Bundle Adjustment) 来提高建图的精度，而前端则只需优化当前帧的位姿，从而系统可实时运行。由于 BA 的引入，与滤波方法相比，基于关键帧优化的视觉 SLAM 可以获得更高的精度，因此，后续视觉 SLAM 的研究多采用基于关键帧非线性优化的方法。同时，PTAM (Parallel Tracking And Mapping) 的开源也极大地加速了视觉 SLAM 的研究，后续的很多视觉 SLAM 系统均是基于 PTAM 的算法框架(刘浩敏 et al., 2016)。Mur-Artal et al. (2015)在 2015 年提出并开源了单目视觉 SLAM 系统 ORB-SLAM, ORB-SLAM 基本沿用了 PTAM 的算法框架，但同时利用了前人的一些优秀算法对 PTAM 的大部分组件进行了改进，比如整套系统统一使用了具有更好视角不变性的 ORB 特征(Rublee et al., 2011)，加入了回环检测与闭合机制以消除累积误差(Galvez-López and Tardos, 2012)，采用了通用图优化 g2o (general graph optimization) 框架(Kümmerle et al., 2011)等等。这些改进使得 ORB-SLAM 成为当前综合性能最好的单目视觉 SLAM 系统之一。

上述的 VO 和 V-SLAM 方案均是基于特征点的方案，在一些纹理缺失的环境中或图像模糊的情况下特征提取可能会失败，这将严重影响基于特征点的 VO 和 V-SLAM 系统的位姿估计精度。相较而言，直接法 (Direct Method) 不依赖于特征提取与匹配，而是直接根据图像的像素灰度信息来估计相机的运动，因此在特征缺失或图像模糊的情况下有更好地稳定性和鲁棒性。当然直接法也有它的缺陷，比如对相机视角改变、曝光时间和光照变化等比较敏感。此外，直接法也还没有特征点法成熟和可靠。随着一些使用直接法的 VO 和 V-SLAM 项目的开源（如 DTAM(Newcombe et al., 2011)、SVO(Forster et al., 2014)、LSD-SLAM(Engel et al., 2014; Engel et al., 2015)等），直接法得到了快速发展，且已经成为视觉导航方法中重要的一部分。

## (2) 基于滤波的视觉/INS 组合导航技术

基于滤波的视觉/INS 组合导航方法本质上是一种视觉辅助 INS (Vision aided INS, VINS) 的方法，即 INS 作为主导航系统并维持滤波状态的传播，而视觉作为一种观测量用于滤波状态更新。根据滤波更新观测量的不同，可将基于滤波的视觉/INS 组合导航

分为松组合和紧组合(Corke et al., 2007)。对于视觉/INS 松组合, 首先利用影像的信息独立进行位姿估计, 然后通过滤波将其解算的位姿信息与 INS 测量信息进行融合完成系统状态估计。如果影像中含有已知位置坐标的特征点, 则可以根据这些已知特征点(也称为控制点)的位置信息独立地解算出影像的位置和姿态, 然后与 INS 提供的位置和姿态求差作为滤波量测更新的观测量(Bayoud et al., 2004; Bayoud, 2005)。如果在没有已知特征点信息的未知环境中, 则只能利用序列影像解算出相机的位置和姿态变化量, 然后再与 INS 提供的位置和姿态变化量求差作为滤波量测更新的观测量(Roumeliotis et al., 2002; Tardif et al., 2010)。松组合的优势在于其稳定性和可靠性较高, 一个系统出现故障不会影响另一个系统地正常运行。

视觉/INS 紧组合则是将影像中提取的特征点像素坐标与 INS 预测的特征点像素坐标求差作为滤波更新的观测量, 其中影像中的特征点可以是具有已知位置信息的绝对特征(Wu et al., 2005; Veth et al., 2006; Trawny et al., 2007; Vu et al., 2012; 王力, 2015)或者是未知环境中的自然特征点(Diel et al., 2005; Mourikis and Roumeliotis, 2007; Kelly and Sukhatme, 2011; Li and Mourikis, 2013; Wu et al., 2015)。具有已知位置信息的绝对特征点可以提供无误差累积的绝对测量值, 而未知环境中的自然特征点则只能提供一种相对测量信息。视觉/INS 紧组合的优势在于比松组合的位姿估计结果更为精确(Chu et al., 2011), 且当影像中的特征点少于三个时, 紧组合能正常利用该观测进行滤波更新, 而松组合则无法利用三个以下的特征点观测量独立解算出位置和姿态(王之卓, 1979; 王力, 2015), 从而无法进行滤波更新。

基于已知特征点的视觉/INS 组合导航依赖于环境中事先布置好的控制点信息, 而在未知环境中利用视觉进行导航时需要提取出环境中的特征点并对特征点的坐标进行估计。与纯视觉的 EKF-SLAM 一样, 基于 EKF 滤波的视觉/INS 组合导航通常将特征点的坐标增广到包含 IMU 误差量的状态向量中一起进行估计(Kleinert and Schleith, 2010; Jones and Soatto, 2011; Kelly and Sukhatme, 2011), 从而利用 IMU 的位置、姿态和特征点坐标之间的相关性提高位姿估计精度。然而, 由于环境中的特征点数量众多, 加入系统状态向量中将导致滤波器的维数剧增, 从而极大地增加了滤波计算量, 因此这种方法不适合于大范围场景。针对该问题, Mourikis and Roumeliotis (2007)提出了多状态约束卡尔曼滤波(Multi-State Constraint Kalman Filter, MSCKF)的视觉/INS 紧组合方法。该方法将一定数目的相机位姿增广到滤波状态向量中而不是环境中的特征点, 这样特征点与影像之间的约束关系将转换为多张影像位姿之间的约束关系, 因此该方法在不损失信息的情况下有效地降低了计算量。此外, 由于状态向量中维持了多个相机位姿的信息且利用了延迟线性化技术减小了线性化误差, 因此该方法较 EKF-SLAM 方法具有更高地状态估计精度且运算量更低(Li and Mourikis, 2013)。

由于视觉/INS 组合导航系统是高度非线性化的系统, 因此基于 EKF 滤波的方法会引入线性化误差, 最终导致滤波估计的不一致性。针对此问题, 一些学者从可观测性分析的角度研究了滤波估计的不一致性并提出了相关的估计一致性改善方法(Huang et al., 2008; Huang et al., 2009; Huang et al., 2010; Kottas et al., 2013; Hesch et al., 2014; Zhang et al., 2017)。基于可观测性分析, Li 和 Mourikis 对最初的 MSCKF 进行了改进并发布了 MSCKF2.0(Li and Mourikis, 2012; 2013)。此外, Martinelli (2012)和 Hernandez et al. (2015) 等人也对视觉/INS 融合估计的可观测性问题进行了系统全面的分析。

上述方法均为基于特征点的视觉/INS 组合导航, 为了提高系统在一些特征点提取或者跟踪较为困难的环境下的稳定性, 部分学者提出了结合点特征和线特征的视觉/惯性里程计方法(He et al., 2018; Heo et al., 2018; Zheng et al., 2018)。此外, 随着直接法视觉导航研究地不断进步和发展, 基于 EKF 滤波的直接法视觉/INS 组合导航也逐渐被关注(Bloesch et al., 2015; Tanskanen et al., 2015; Bloesch et al., 2017)。

### (3) 基于非线性优化的视觉/INS 组合导航技术

基于非线性优化的视觉/INS 组合通过同时最小化 IMU 测量误差和视觉测量的重投影误差来获取系统最优状态估计, 而且为了更高的估计精度一般通过紧组合的方式实现。与滤波的方法相比, 基于非线性迭代优化的方法往往能获得更高精度的位姿估计, 因为该方法在每次迭代中重新进行线性化, 从而更好地处理了系统的非线性问题。但是, 多次迭代线性化也直接导致了更大的运算量。为了实时运行基于非线性优化的视觉/INS 组合算法, 在实际应用中通常可采用增量式平滑的方法(Kaess et al., 2011; Indelman et al., 2012; Indelman et al., 2013), 基于固定滞后平滑的方法(Dong-Si and Mourikis, 2011)或者基于滑动窗口非线性优化的方法(Leutenegger et al., 2015; Shen et al., 2015; Qin et al., 2018)。在基于滑动窗口的非线性优化方法中, 当相机位姿和特征点从滑动窗口中滑出时, 对它们的状态进行边缘化运算会破坏非线性优化过程中增量方程系数矩阵的稀疏性(Sibley et al., 2010), 从而影响算法高效地执行。为了解决该问题, 在边缘化的过程中通常需要直接剔除掉一些观测值, 从而保证系统的稀疏特性(Leutenegger et al., 2015; Qin et al., 2018)。此外, 边缘化运算还会带来由于线性化误差的存在而引起的非线性系统状态估计不一致问题, 也就是线性化误差会导致非线性系统中不可观的状态量错误地变成可观量(Huang et al., 2009)。为了使得线性系统和非线性系统的可观性保持一致, 在非线性优化的过程中需要固定线性化点(Kottas et al., 2013; Huang et al., 2014; Leutenegger et al., 2015)。

在基于非线性优化的视觉/INS 组合算法中, 由于每次迭代优化中初始状态会改变, 因此每次均需要对两帧影像间的 IMU 测量值重新进行积分, 这将极大地增加算法的计算量, 从而影响算法地实时运行。为了解决由于初始状态改变导致 IMU 需要重新积分

的问题, Lupton and Sukkarieh (2012)对两帧影像间的 IMU 观测值进行了重新参数化并构建了不受初始状态影响的 IMU 预积分(IMU pre-integration)观测值。Forster et al. (2017)在此基础上进一步给出了预积分的流形表达, 并详细推导了 IMU 预积分测量值的噪声传播以及非线性优化过程中需要计算的各类雅克比矩阵。

虽然基于非线性优化的视觉/INS 组合导航较 EKF 滤波的方法在估计精度方面具有一定的优势, 但是多次迭代也导致了更大的计算量。考虑到基于 EKF 滤波的多状态约束视觉/INS 紧组合方法能获得与基于非线性优化的方法相当的估计精度(Li and Mourikis, 2013), 且在运算能力有限的嵌入式平台上具有明显优势, 因此本文将对其进行深入研究并将其融入到基于载波相位的 GNSS RTK/INS 高精度紧组合框架中, 从而实现复杂 GNSS 环境下的高精度位姿估计。

从上述相关研究成果来看, 基于特征点的视觉/INS 组合导航位姿估计方法日趋成熟, 在一些简单场景下的相关技术问题基本得到解决。但是, 在实际应用过程中仍然存在一些问题需要进一步深入研究: 在极端运动、极端环境下的系统稳定性问题; 大规模、长时间运行时的误差累积问题; 系统地快速初始化问题等。

#### 1.2.4 GNSS/INS/视觉组合导航技术研究现状

如前所述, GNSS/INS 组合导航在 GNSS 信号中断期间导航误差将会迅速累积, 而视觉/惯导组合可以获得局部的高精度位姿信息, 但是它的导航误差仍然会积累而且无法提供全局的位姿信息, 将 GNSS、INS 和视觉进行有效地融合即可克服各自的局限性, 进而提高组合导航系统的性能。

Kim and Sukkarieh (2005)较早地将 SLAM 增广到 GNSS/INS 组合导航系统中用于提高组合系统在 GNSS 不可用时的导航精度。其中, SLAM、GNSS 和 INS 的融合采用分散的滤波估计结构: 当 GNSS 位置信息可用时, 利用 GNSS/INS 的结果进行建图, 当 GNSS 位置不可用时使用构建好的环境地图估计 INS 的误差从而提高 INS 导航精度, 仿真实验表明组合系统在没有 GNSS 辅助的一段时间内可提供高精度的导航结果。

Chu et al. (2012)基于 EKF 构建了相机/IMU/GNSS 组合导航系统并采用实测数据对算法进行了验证, 该组合算法采用了松组合滤波模型, 即先利用 GNSS 伪距观测值来恢复单目相机帧间运动的尺度信息, 然后利用相机帧间运动计算出的平移和旋转信息与 INS 进行滤波融合。

Vu et al. (2012)针对智能交通中高精度、高可用性的可靠车道级导航需求, 通过 EKF 融合了 DGPS、已知路标点(交通信号灯)和 INS 的信息, 并构建了实时的视觉/DGPS/INS 紧组合导航系统, 实验结果表明该系统可获得米级的水平位置精度。

Lynen et al. (2013)提出了基于 EKF 的多源传感器融合框架, 通过该算法框架能将

GPS 位置测量值、IMU 测量值和相机的位姿估计值以松组合的方式进行有效融合实现无误差漂移的状态估计。

张晓东 (2013)在其博士论文中研究了可量测影像与 GPS/IMU 融合的高精度定位定姿技术, 由于可量测影像定位定姿与 GPS/IMU 定位定姿之间相对独立, 因此融合滤波算法无法利用影像信息对 INS 进行辅助, 从而损失了信息。

Won et al. (2014)针对 GNSS 复杂环境下 GNSS、INS 和视觉组合的问题, 提出了一种用于评估卫星和特征点空间几何分布强度的性能指标 WDOP (Weighted DOP), 仿真和实测实验表明根据该性能指标对三种传感器进行合理地组合有效地提高了组合系统在 GNSS 受限环境下的定位精度。

Shepard and Humphreys (2014)将 GPS 载波相位解算出来的位置与视觉 SLAM 和 IMU 测量值进行融合获得了全球参考框架下的高精度位置和姿态。为了能使算法实时运行, 论文中采用了一种次优的估计结构: 将 GPS 位置融合到 PTAM 算法的后端线程中估计特征点位置和相机的位姿, IMU 测量值只用于状态预测而不引入到后端优化中。

王力 (2015)在其博士论文中研究了基于 GPS 位置的影像/GPS/INS 组合导航算法, 其中 GPS 与 INS 采用松组合模式, 影像与 INS 采用紧组合模式。仿真和实测实验结果表明, 影像/GPS/INS 组合导航算法可极大地改善无 GNSS 环境下 INS 的定位定姿精度, 特别是航向角精度。但是论文中并没有给出航向角精度提升的本质原因。

王加芳 (2017)在其硕士论文中研究了 GPS/Visual/INS 多传感器融合导航算法, 有效提高了视觉 SLAM 算法的稳定性并改善了 GPS 恶劣情况下的定位精度与连续性。该融合算法首先通过 EKF 滤波以松组合的方式融合 GPS 和 INS 数据, 然后根据融合结果确定新图像帧的初始位姿并用于特征匹配, 最后应用到 SLAM 的图优化中。

ETH 机器人实验室的 Mascaro et al. (2018)和香港科技大学机器人实验室的 Qin et al. (2019)将 GPS 位置观测值引入到基于滑动窗口的非线性优化 VIO 框架中, 实现了基于图优化的多源传感器融合, 并采用实测实验数据对算法进行了验证, 结果表明多源融合算法可获得局部准确、全局无误差漂移的位姿估计。由于在优化过程中总是需要求解局部框架和全局框架下的变换并进行对齐, 因此该方法引入了额外的计算量。

上述 GNSS/INS/视觉组合导航的研究均只针对单 GPS 系统, 而且主要使用接收机给出的位置解或者伪距与惯导/视觉进行组合, 算法验证也多采用仿真实验或者开阔天空环境下的实验数据。然而, 基于伪距、伪距率的紧组合只能获得米级的绝对定位精度, 无法提供高精度导航定位信息; 基于 GPS 位置解的组合是一种松组合, 其缺陷是无法利用惯导/视觉组合的先验信息辅助 GPS 定位解算, 而独立 GPS 在复杂 GNSS 环境下的定位精度、可用性等将显著降低, 进而影响组合导航系统的性能。本文研究的多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合是一种更深层次的数据融合, 可以充分发挥各自的优势。

### 1.3 研究目标与研究内容

针对 GNSS 复杂环境下的连续、高精度定位定姿需求以及当前相关研究中存在的问题，本文的研究目标为：构建单频多模 GNSS（GPS、BDS、GLONASS）RTK/INS 紧组合算法模型和视觉/INS 紧组合算法模型并对其进行统一融合，实现复杂 GNSS 环境下的低成本高精度定位定姿。具体研究内容包括：

- (1) 研究地心地固坐标系下 GNSS/INS 松组合滤波模型，为后续 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型的构建奠定基础。为了便于实现 GNSS、INS 和视觉信息的融合处理，本文选取地心地固坐标系作为 INS 参考坐标系，推导了地心地固坐标系下的高精度 INS 机械编排算法与 INS 误差方程，以及基于 GNSS 位置和速度观测值的滤波量测模型。
- (2) 研究单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合算法滤波模型。主要包括多系统 GNSS 定位的时空基准统一、多模 GNSS RTK 定位的函数模型与随机模型的建立、RTK/INS 紧组合状态方程与观测方程的建立、INS 辅助模糊度固定方法以及复杂 GNSS 环境下的 RTK/INS 紧组合抗差模型等。同时，利用开阔天空和城市复杂环境下的车载测试数据对单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定性能、重收敛性能、定位性能以及抗差性能等进行评估和分析。
- (3) 提出 INS 相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型用于解决传统 INS 绝对位置辅助模糊度固定方法在系统状态有偏时无法正确固定模糊度的难题，主要包括利用 IMU 预积分理论分析 INS 位置增量的特点、INS 相对约束辅助模糊度固定的算法原理、INS 相对位置增量探测 GNSS 周跳以及利用实测数据对算法模型进行分析和验证。
- (4) 研究单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合算法滤波模型。主要包括基于已知特征点的视觉/INS 紧组合状态方程和观测方程的建立、基于多状态约束的视觉/INS 紧组合状态方程和观测方程的建立以及多状态约束滤波估计与最小二乘最优估计等价性的证明。同时，构建仿真软件平台对上述两种视觉/INS 紧组合算法模型进行验证。
- (5) 搭建含有 GNSS、IMU 和相机的硬件验证平台，在保证多传感器之间的时空同步前提下，开展复杂 GNSS 环境下的车载实验对单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合算法的定位、测速和定姿性能进行评估和验证。

### 1.4 论文章节安排

全文共分为七章，各章节安排如下：

第一章，介绍了本文的研究背景与意义，总结和阐述了与 GNSS/INS/视觉组合导航相关技术的国内外研究现状以及当前研究中存在的问题，最后给出了本文的研究目标和

具体研究内容。

第二章，主要阐述了 GNSS/INS/视觉融合的数学基础，为后续 RTK/INS/视觉紧组合算法模型的研究奠定基础。首先，介绍了组合导航中的常用坐标系、姿态参数化以及 GNSS 定位中的观测量与误差处理方法；然后，阐述了惯性导航技术基础，包括 IMU 误差建模、地心地固坐标系下的惯导机械编排算法与误差方程；接着介绍了视觉导航中常用的针孔相机模型、相机标定与特征点三角化等基础内容；最后，介绍了组合导航中常用的最优估计方法，并推导了地心地固坐标下的 GNSS/INS 松组合算法数学模型。

第三章，主要研究了单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合算法模型。首先，对多系统 GNSS 定位的时空基准进行了统一，并给出了多模 RTK 定位的函数模型和随机模型；然后，阐述和推导了两种 RTK/INS 紧组合的数学模型，并提出了一种适用于 RTK/INS 紧组合的两步抗差算法；最后，通过开阔天空和城市复杂环境下的两组车载数据对单频多模 RTK/INS 紧组合的模糊度固定、重收敛和定位性能以及抗差算法的有效性等进行了评估与验证。

第四章，提出了 INS 相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型。首先结合 IMU 预积分理论对 INS 位置增量的特点进行了分析；然后，给出了 INS 相对约束辅助模糊度固定的算法原理以及利用 INS 相对位置增量探测 GNSS 周跳的方法；最后，通过实测车载数据对提出的新算法模型进行了分析和验证，该算法模型可有效地提高 RTK/INS 紧组合模糊度固定的可靠性。

第五章，研究了 RTK/INS/视觉紧组合中视觉/INS 紧组合的建模方法。首先，统一了 RTK/INS 紧组合与视觉/INS 紧组合的 IMU 误差状态模型；然后，推导了基于已知特征点的视觉/INS 紧组合与基于多状态约束的视觉/INS 紧组合在地心地固坐标系下的数学模型；最后，通过仿真实验对建立的两种视觉/INS 组合导航算法进行了验证。

第六章，描述了搭建的车载实验软硬件平台且给出了各传感器之间精密时空同步的方法，然后利用 GNSS 复杂环境下采集的车载实验数据对单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合算法的性能进行了评估和验证。需要指出的是，本章的测试评估是针对单频多系统 GNSS RTK/INS/视觉紧组合解算的综合性能，不同于第三、四、五章里针对某个关键算法的专项测试评估。

第七章，总结了论文的主要工作与研究成果，凝练了本文研究的创新与特色，指出了本文研究存在的不足以及进一步研究的内容和方向。

## 2 GNSS/INS/视觉融合数学基础

### 2.1 引言

GNSS/INS/视觉紧组合导航算法研究涉及 GNSS 定位算法、惯性导航算法、视觉导航算法和组合导航算法等几个方面,而且由于紧组合是原始观测量层面的组合,因此该课题的研究既需要掌握 GNSS 精密定位算法,又要求熟悉惯性导航技术与视觉导航算法设计,三者是研究 GNSS/INS/视觉紧组合技术的基础。因此,本章将对 GNSS 定位基础、惯性导航技术、视觉导航基础以及 GNSS/INS 松组合导航算法进行介绍,为 GNSS/INS/视觉紧组合算法的研究提供理论与数学基础。

本章具体内容安排如下:2.2 节和 2.3 节分别介绍了组合导航中的常用坐标系和姿态参数的表达方法(称为姿态参数化);2.4 节介绍了 GNSS 定位中常用的观测量与误差处理方法;2.5 节主要介绍了惯性导航基础,包括 IMU 传感器误差建模、地心地固坐标系下 INS 机械编排算法和 INS 误差方程的推导,为后续的组合导航算法设计提供基础;2.6 节介绍了视觉导航的基础知识,包括对视觉观测量进行建模的针孔相机模型、相机内参与畸变参数的标定与求取未知环境中特征点坐标的三角化方法;2.7 节介绍了最小二乘、卡尔曼滤波和最优平滑三种最优估计方法;2.8 节给出了地心地固坐标系下的 GNSS/INS 组合导航算法设计;2.9 节对本章内容进行小结。

### 2.2 常用坐标系

在导航与定位研究中,坐标系用来描述载体的运动,因此导航技术均需要在坐标系的基础上实现。组合导航涉及到多种坐标系,在解算过程中不可避免地对同一参数向量进行坐标变换(Groves, 2013)。本文用到的主要坐标系包括:地心惯性坐标系、地心地固坐标系、导航坐标系、载体坐标系和相机坐标系等。

#### (1) 地心惯性坐标系

地心惯性坐标系( $i$ 系)是在惯性空间中静止或作匀速运动的参考系,是一个理想坐标系(孔祥元 et al., 2005)。实践中将该坐标系的原点固定在地球质心, $z$ 轴平行于地球平均自转轴且指向北极点(协议北极), $x$ 轴指向平春分点, $y$ 轴在赤道面内且与 $x$ 轴和 $z$ 轴垂直构成右手坐标系,三个轴在惯性空间中固定不动,如图 2.1 中 $x^i y^i z^i$ 所示。



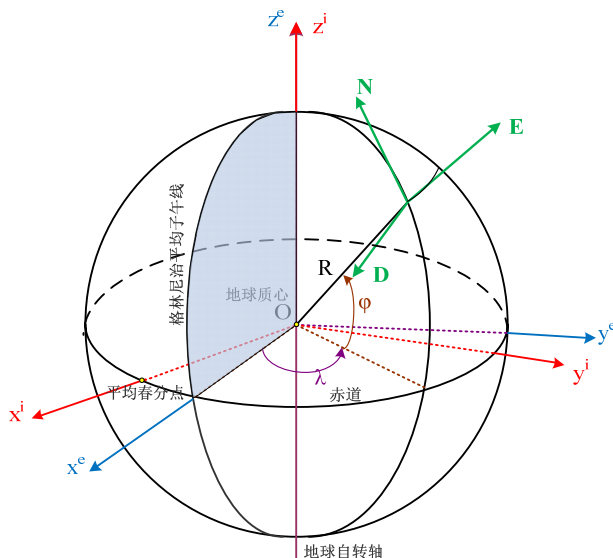


图 2.1 参考坐标系：i系、e系、n系

### (2) 地心地固坐标系

地心地固坐标系（Earth-Center-Earth-Fixed, ECEF，也称e系或者G系，后文将不再区分）是与地球固连的坐标系，坐标原点为地球中心，z轴平行于地球平均自转轴且指向北极点（协议北极），x轴在赤道平面内指向赤道与平均格林尼治子午线的交点，y轴在赤道面内且与x轴和z轴垂直构成右手坐标系，如图 2.1 中 $x^e y^e z^e$ 所示。该坐标系一般有两种不同的表示方法，即空间直角坐标和地心大地坐标（经度、纬度、大地高）。地心地固坐标系在大地测量被广泛采纳和应用，特别是 GNSS 定位中，因此本文将地心地固坐标系作为参考坐标系进行算法建模。地心地固坐标系与惯性坐标系可通过如下变换矩阵进行转换：

$$\mathbf{R}_i^e = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{ie}^e \cdot t) & \sin(\omega_{ie}^e \cdot t) & 0 \\ -\sin(\omega_{ie}^e \cdot t) & \cos(\omega_{ie}^e \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

其中， $\omega_{ie}^e$ 为地球在e系下的自转角速率，等于  $7.2921158 \times 10^{-5}$  rad/s； $t$ 为对应的时间间隔。

### (3) 导航坐标系

导航坐标系（n系）一般选当地地理水平坐标系（Local-Level-Frame, LLF），该坐标系可以提供直观的导航参数。该坐标系的原点为载体中心，x轴沿参考椭球子午线的切线方向指北，z轴沿参考椭球法线垂直向下，y轴在当地水平面内与x轴和z轴构成右手坐标系，又称为北-东-地（North-East-Down, NED）坐标系，如图 2.1 所示。如果定义坐标系的z轴沿参考椭球法线垂直向上，则坐标系为东-北-天（East-North-Up, ENU）。本文选

取 NED 坐标系为导航坐标系, 从  $n$  系到  $e$  系的旋转矩阵及其对应的四元数可表示为(Shin, 2005):

$$\mathbf{R}_n^e = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & -\cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{q}_n^e = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4 - \varphi/2)\cos(\lambda/2) \\ -\sin(-\pi/4 - \varphi/2)\sin(\lambda/2) \\ \sin(-\pi/4 - \varphi/2)\cos(\lambda/2) \\ \cos(-\pi/4 - \varphi/2)\sin(\lambda/2) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中,  $\lambda$ 和 $\varphi$ 分别表示位置坐标的经度和纬度。

#### (4) 载体坐标系

载体坐标系 ( $b$ 系) 是同载体固连的一种正交坐标系, 如果 IMU 为载体, 则坐标原点为 IMU 测量中心。一种常用的载体坐标系可定义为:  $x$ 轴与载体角运动的横滚轴方向相同且指向载体前方,  $y$ 轴与载体角运动的俯仰轴方向相同且指向载体右侧,  $z$ 轴与载体角运动的航向轴方向相同且与 $x$ 轴和 $y$ 轴构成右手坐标系, 称为前-右-下 (Forward-Right-Down, FRD) 坐标系。导航坐标系转换到载体坐标系可以通过三次旋转来实现:

$$\mathbf{R}_n^b = \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \quad (2.4)$$

其中 $\psi$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ 分别为航向角、俯仰角和横滚角。根据旋转矩阵的正交性质可得载体系到导航系的旋转矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b^n &= (\mathbf{R}_n^b)^T = \mathbf{R}_z(-\psi)\mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\phi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\theta c\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 $s$ 和 $c$ 分别表示 $\sin$ 和 $\cos$ 。如果上述欧拉角为小角, 则旋转矩阵可简化为:

$$\mathbf{R}_b^n = \mathbf{I} + [\epsilon \times] \quad (2.6)$$

式中 $\epsilon = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ ;  $[\epsilon \times]$ 是 $\epsilon$ 的反对称矩阵。

#### (5) 相机坐标系

相机坐标系 ( $c$ 系) 的原点为光学透镜中心,  $X$ 轴沿相机镜头方向且向右为正,  $Z$ 轴沿相机镜头方向且向前为正,  $Y$ 轴与 $X$ 轴和 $Z$ 轴构成右手坐标系 (图 2.2), 该定义和 OpenCV 一致。与相机坐标系关联的是像平面坐标系 (图 2.2 中的  $u, v$  平面坐标系), 该坐标系是专门用来描述相机观测量的且以像素为单位。像平面坐标系的原点一般在图像的左上角,  $u$ 轴沿图像的上边缘向右为正,  $v$ 轴沿图像的左边缘向下为正。像平面坐标系的  $u$ 轴和  $v$ 轴分别和相机坐标系的  $X$ 轴和  $Y$ 轴平行。

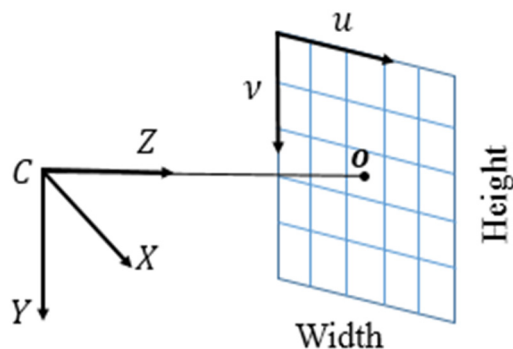


图 2.2 相机坐标系和像平面坐标系

## 2.3 姿态参数化

载体的姿态一般用载体坐标系相对于参考坐标系的角度来描述。合理的姿态表达是高精度姿态求解的基础，导航中常用的姿态参数表示方法有欧拉角、旋转矩阵又称方向余弦矩阵（Direction Cosine Matrix, DCM）、姿态四元数和等效旋转矢量等。下面将简单介绍以上几种姿态表示方法的主要特性，更详细的内容可参考文献(袁信和郑谔, 1985; Groves, 2013)。

### (1) 欧拉角

欧拉角是一种直观的描述两个坐标系之间相对旋转的方法，它把一个旋转分解为绕 3 个不同轴的旋转。由于绕不同轴旋转有多种排列顺序，因此欧拉角有着多种不同的定义方法。在导航应用中，常用横滚角、俯仰角和航向角来描述载体坐标系（ $b$ 系）相对于导航坐标系（ $n$ 系）的姿态。首先，绕 $n$ 系的 $z$ 轴旋转一个角度（即航向角）；然后，绕旋转后的 $n$ 系的 $y$ 轴继续转动一个角度（即俯仰角）；最后，绕前两次旋转后的坐标系的 $x$ 轴旋转一个角度（即横滚角）。欧拉角的一个重大缺陷是当俯仰角为 $\pm 90^\circ$ 时，无法区分横滚角和航向角，即欧拉角姿态表示法存在奇异性问题。

### (2) 旋转矩阵

旋转矩阵又称为方向余弦矩阵，是另一种描述两个坐标系之间相对姿态的参数化方法，具有正交特性。旋转矩阵可以通过三个欧拉角计算得到，如公式(2.4)，该矩阵可以非常方便地对两个不同坐标系里的向量进行投影变换，例如将 $b$ 系中的向量 $V^b$ 变换到 $n$ 系中：

$$V^n = R_b^n V^b \quad (2.7)$$

旋转矩阵微分方程刻画了旋转矩阵随时间的变化率(张天光 et al., 2007):

$$\dot{R}_b^n = R_b^n [\omega_{nb}^b \times] \quad (2.8)$$

### (3) 等效旋转矢量

等效旋转矢量是使用转动轴（向量）和绕该转动轴转动的角度 4 个参数来描述坐标系旋转的，之所以称为“等效”是因为多次转动可以等效为绕某根旋转轴的单次转动(秦永元, 2006)。由旋转矢量到旋转矩阵的转换过程可以通过罗德里格斯（Rodrigues）公式计算得到：

$$\mathbf{R} = \cos\|\boldsymbol{\phi}\|\mathbf{I} + (1 - \cos\|\boldsymbol{\phi}\|)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^T + \sin\|\boldsymbol{\phi}\|\boldsymbol{\phi}\times \quad (2.9)$$

式中 $\boldsymbol{\phi}$ 为旋转轴向量； $\|\boldsymbol{\phi}\|$ 为绕旋转轴的角度大小； $\times$ 表示对向量求反对称矩阵。由于在捷联惯导机械编排姿态更新解算时需要利用陀螺测量的角速度进行积分，在此给出等效旋转矢量的时间微分方程(Bortz, 1971)：

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}\left(1 - \frac{\|\boldsymbol{\phi}\|\sin\|\boldsymbol{\phi}\|}{2(1-\cos\|\boldsymbol{\phi}\|)}\right)\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \quad (2.10)$$

该式最早由 Bortz 提出，因此称为 Bortz 方程。Bortz 方程有效地解决了刚体作有限转动时出现的不可交换性误差问题。

### (4) 姿态四元数

姿态四元数是一种用四维向量来表示三维空间旋转的姿态参数化方法，可表示为旋转矢量的函数(Savage, 2000)：

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T = \begin{bmatrix} \cos(0.5\|\boldsymbol{\phi}\|) \\ \frac{\sin(0.5\|\boldsymbol{\phi}\|)}{0.5\|\boldsymbol{\phi}\|}0.5\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

其对应的旋转矩阵可表示为：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

同旋转矩阵一样，四元数也可以对两个不同坐标系里的向量进行投影变换，如将 $n$ 系中的向量 $\mathbf{V}^n$ 变换到 $b$ 系中可通过下式完成：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^b \end{bmatrix} = \mathbf{q}_n^b \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^n \end{bmatrix} (\mathbf{q}_n^b)^* \quad (2.13)$$

式中 $(\mathbf{q}_n^b)^*$ 表示姿态四元数 $\mathbf{q}_n^b$ 的共轭（或逆）。

## 2.4 GNSS 定位基础

### 2.4.1 GNSS 观测量

#### (1) 原始观测值

GNSS 接收机测量的是卫星到测站的距离，基本观测量是伪距和载波相位观测值，其观测方程为(李征航和黄劲松, 2010)：

$$P = \rho + c(dt_r - dt^s + dH_r - dH^s) + T + I + M_P + \varepsilon_P \quad (2.14)$$

$$\lambda\varphi = \rho + c(dt_r - dt^s + dh_r - dh^s) + T - I + \lambda N + M_\varphi + \varepsilon_\varphi \quad (2.15)$$

式中,  $P$ 和 $\varphi$ 分别表示伪距和载波相位观测值;  $\rho$ 为接收机到卫星的几何距离;  $c$ 为真空中的光速;  $dt_r$ 和 $dt^s$ 分别为接收机钟差和卫星钟差;  $dH$ 和 $dh$ 分别为伪距和相位硬件延迟偏差, 小标 $r$ 和上标 $s$ 分别表示接收机和卫星对应的量;  $T$ 和 $I$ 分别为对流层和电离层延迟;  $\lambda$ 和 $N$ 分别为载波波长和载波相位整周模糊度;  $M_P$ 和 $M_\varphi$ 分别表示伪距和载波相位的多路径误差;  $\varepsilon_P$ 和 $\varepsilon_\varphi$ 分别表示伪距和载波相位的测量噪声(含有多路径效应等其他未模型化的误差)。除了上式列出的误差项外, 伪距和载波相位观测值中的误差还包括: 天线相位中心偏差、相对论效应和相位缠绕等, 关于这些误差的讨论可参考(Kouba and Héroux, 2001; 叶世榕, 2002; 李征航和黄劲松, 2010; Geng, 2011)。

### (2) 单差观测值 (Single Difference, SD)

单差观测值可以分为站间单差和星间单差, 站间单差为两个测站对同一颗 GNSS 卫星进行同步观测的观测值之差, 星间单差则为同一个测站对两颗不同的 GNSS 卫星同步观测的观测值之差。由于伪距观测方程与载波相位观测方程形式相同, 其对应的差分观测方程可类比得到, 因此这里只给出相位观测方程的差分形式。根据 GNSS 原始载波相位观测方程(2.15)式可得到如下站间和星间观测方程:

$$\lambda\varphi_{br}^k = \rho_{br}^k + c(dt_r + dh_r)_{br}^k + T_{br}^k - I_{br}^k + \lambda N_{br}^k + M_{\varphi,br}^k + \varepsilon_{\varphi,br}^k \quad (2.16)$$

$$\lambda\varphi_b^{jk} = \rho_b^{jk} + c(-dt^s - dh^s)_b^{jk} + T_b^{jk} - I_b^{jk} + \lambda N_b^{jk} + M_{\varphi,b}^{jk} + \varepsilon_{\varphi,b}^{jk} \quad (2.17)$$

式中, 下标 $b$ 和 $r$ 分别表示基准站和流动站; 上标 $j$ 和 $k$ 分别表示参考卫星和非参考卫星; 其他符号的含义与式(2.15)相同。

从以上公式可以看出, 站间单差消除了与卫星有关的误差如卫星钟差、轨道误差和卫星端硬件延迟, 同时大气延迟等空间相关误差也得到削弱。站间单差无法消除接收机钟差和接收机硬件延迟等, 这些误差与单差模糊度高度耦合使得单差模糊度不再具备整周特性。与站间单差相对应, 星间单差可以消除与接收机相关的误差项, 如接收机钟误差和接收机硬件延迟等。但是星间单差无法消除卫星端的误差如卫星钟差和卫星端硬件延迟等, 因此星间单差的模糊度也不具有整周特性。

### (3) 双差观测值 (Double Difference, DD)

双差观测值可通过对两个测站和两颗卫星的站间差分 and 星间差分求差得到, 根据(2.16)式可得到基准站和流动站对令一颗卫星 $j$ 的站间单差观测方程为:

$$\lambda\varphi_{br}^j = \rho_{br}^j + c(dt_r + dh_r)_{br}^j + T_{br}^j - I_{br}^j + \lambda N_{br}^j + M_{\varphi,br}^j + \varepsilon_{\varphi,br}^j \quad (2.18)$$

对式(2.16)和(2.18)求差即可得站间与星间双差观测方程，如下：

$$\lambda\varphi_{br}^{jk} = \rho_{br}^{jk} + T_{br}^{jk} - I_{br}^{jk} + \lambda N_{br}^{jk} + M_{\varphi,br}^{jk} + \varepsilon_{\varphi,br}^{jk} \quad (2.19)$$

可以看出，双差观测值消除了接收机相对钟差误差且电离层和对流层延迟误差进一步削弱。由于双差观测值消除了接收机端和卫星端的误差，同时短基线的双差大气残余误差可以忽略，因此双差模糊度恢复了整周特性，可以直接进行整周模糊度解算。

#### (4) 三差观测值 (Triple Difference, TD)

三差观测值也被称为双差观测值的历元间差分，设相邻历元 $t_k$ 和 $t_{k+1}$ 对应的载波相位双差观测方程分别为：

$$\lambda\varphi_{br}^{jk}(t_k) = \rho_{br}^{jk}(t_k) + T_{br}^{jk}(t_k) - I_{br}^{jk}(t_k) + \lambda N_{br}^{jk}(t_k) + M_{\varphi,br}^{jk}(t_k) + \varepsilon_{\varphi,br}^{jk}(t_k) \quad (2.20)$$

20)

$$\lambda\varphi_{br}^{jk}(t_{k+1}) = \rho_{br}^{jk}(t_{k+1}) + T_{br}^{jk}(t_{k+1}) - I_{br}^{jk}(t_{k+1}) + \lambda N_{br}^{jk}(t_{k+1}) + M_{\varphi,br}^{jk}(t_{k+1}) + \varepsilon_{\varphi,br}^{jk}(t_{k+1}) \quad (2.21)$$

将上面两式作差即可得到三差观测方程的表达式：

$$\lambda\varphi_{br}^{jk}(t_k, t_{k+1}) = \rho_{br}^{jk}(t_k, t_{k+1}) + M_{\varphi,br}^{jk}(t_k, t_{k+1}) + \varepsilon_{\varphi,br}^{jk}(t_k, t_{k+1}) \quad (2.22)$$

其中， $(\cdot)(t_k, t_{k+1}) = (\cdot)(t_{k+1}) - (\cdot)(t_k)$ 。对于 1 Hz 采样率以上的 GNSS 观测值，历元间电离层和对流层变化很小，历元差分可以完全消除。三差观测方程的几何强度较差，一般不用于最终的定位解算，而被用于进行周跳探测和提供解的初值等(李征航和黄劲松, 2010)。

### 2.4.2 GNSS 误差处理方法

GNSS 精密定位中使用的原始伪距和载波相位观测值含有的主要误差大致可分为三类：与卫星有关的误差项，主要包括卫星轨道误差、卫星钟差、卫星端硬件延迟、卫星天线相位中心偏差和相对论效应；与信号传播路径有关的误差项，主要包括电离层和对流层延迟误差以及多路径效应等；与测站接收机有关的误差项，主要包括接收机钟误差、固态潮、海洋潮、接收机天线相位中心偏差、接收机端硬件延迟与测量噪声等(李征航和黄劲松, 2010)。为了消除或削弱以上各项误差的影响，常用的误差处理方法有：模型改正法、观测值组合消除法、参数估计法。

#### (1) 模型改正法

对于能用精确经验模型或者理论公式进行改正的误差，比如天线相位中心的偏差及其变化可以利用国际 GNSS 服务组织 (International GNSS Service, IGS) 的相关产品进

行模型改正，相位缠绕、相对论效应等误差则可以使用严密的理论公式进行改正。

## (2) 观测值组合消除法

如上节所述，观测值中的某些共性误差或者相关性误差可以通过观测值的线性组合或者差分的方法消除。比如，双频无电离层组合可以极大的削弱电离层延迟误差；站间和星间双差可以消除卫星端、接收机端的误差，并且可以极大削弱空间相关误差。

## (3) 参数估计法

对于不能用模型精确拟合的误差项，比如对流层天顶湿延迟等，可以将它们与其他待求参数放在一起进行估计。比如在处理中长基线数据时，先用 Saastamoinen 模型 (Saastamoinen, 1972) 等经验模型改正对流层的干分量误差，然后将天顶湿延迟参数连同测站坐标和模糊度参数一起进行估计 (Takasu and Yasuda, 2010)。

## 2.5 惯性导航基础

### 2.5.1 惯性传感器误差建模

惯性测量单元 (IMU) 是惯性导航系统的核心传感器，通常由 3 轴陀螺和 3 轴加速度计组成。其中，陀螺用来测量载体在惯性空间中的角速度，加速度计用来测量载体相对于惯性空间的比力 (定义为载体在惯性空间受到的合加速度与引力加速度之差)。捷联式高精度 IMU 通常输出角增量和速度增量，即在采样周期内对角速度和比力测量值进行积分 (Shin, 2005):

$$\Delta\tilde{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega_{ib}^b dt \quad (2.23)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{f,k}^b = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}^b dt \quad (2.24)$$

式中  $\Delta\tilde{\theta}_k$  和  $\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{f,k}^b$  分别为陀螺和加速度计在  $t_k$  时刻的角增量和速度增量输出。

由于受到传感器工艺水平的影响，陀螺和加速度计输出的测量值必然含有误差，这些误差主要包括随机噪声、零偏误差、比例因子误差和交轴耦合误差等。对于系统性误差中的确定性误差如常值可以在实验室通过标定的方式进行补偿，而对于扣除确定性误差后的残余误差项如随机噪声等需要进行在线估计和补偿。

惯性传感器的残余误差是影响组合导航精度的重要因素，因此组合导航算法设计时必须考虑对重要的惯性传感器残余误差进行估计和补偿，主要包括陀螺和加速度计的零偏和比例因子误差。组合导航算法中通常将这类误差模型化，比如建模为随机游走或者一阶高斯-马尔科夫过程。由于一阶高斯-马尔科夫过程的数学描述简单且适合于描述随时间缓慢变化的误差，因此组合导航算法中常将零偏和比例因子建模为一阶高斯-马尔

科夫过程。

连续型一阶高斯-马尔科夫过程用公式可表示为(Maybeck, 1982):

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{T}x(t) + w(t) \quad (2.25)$$

式中 $x(t)$ 表示一阶高斯-马尔科夫过程, 由过程的均方值 $\sigma^2$ 和相关时间 $T$ 进行描述;  $w(t)$ 为驱动白噪声, 其方差强度为 $q = 2\sigma^2/T$ 。一阶高斯-马尔科夫过程的离散形式为:

$$x_{k+1} = e^{-\Delta t/T}x_k + w_k \quad (2.26)$$

其驱动白噪声的方差强度为 $q_k = \sigma^2(1 - e^{-\Delta t/T})$ ,  $\Delta t$ 为采样时间间隔。

## 2.5.2 捷联惯导机械编排

惯性导航系统由惯性测量单元 (IMU) 和惯性导航算法组成, 它是一种基于航位推算原理 (Dead Reckoning, DR) 的自主式导航系统。惯性导航是以牛顿运动定律为基础, 通过惯性测量单元测量载体在惯性空间的线运动和角运动信息, 然后根据导航微分方程计算出载体的位置、速度和姿态信息(Savage, 2000)。

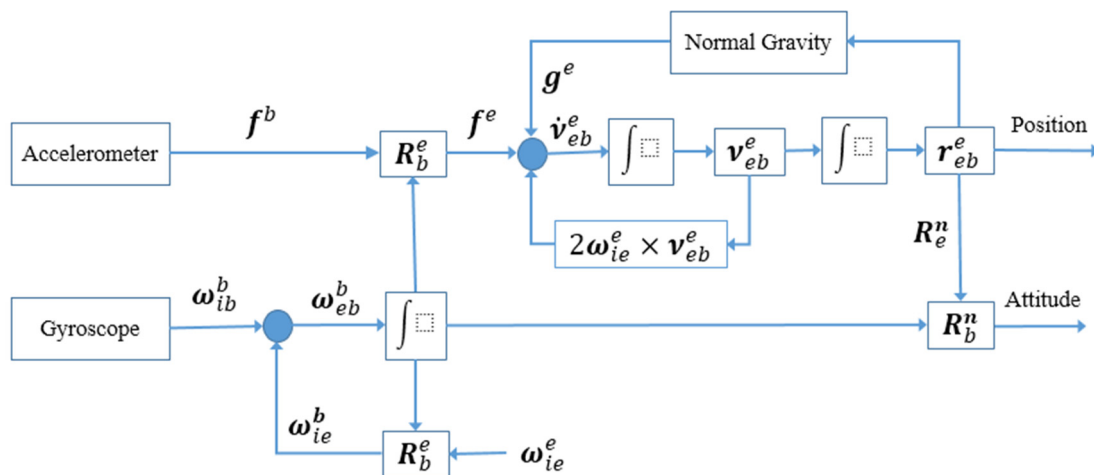
惯性导航从根本上说是通过加速度计测量的比力观测值在特定的参考坐标系内求解比力方程的过程。比力在参考坐标系下的测量值可以通过陀螺测量值解算出的参考坐标系相对于惯性坐标系的姿态确定。由于陀螺仪测量的是载体相对于惯性坐标系的角速度矢量, 所以最直接的参考坐标系为惯性坐标系。由于人类的活动均在地球附近, 导航系统只有在当地水平坐标系、地心地固坐标系等参考坐标系下给出的位置、速度、姿态才有实际意义, 本文选择 $e$ 系为 INS 导航解算参考坐标系。虽然在当地水平坐标系下描述的速度和姿态具有更加直接的几何意义, 但是 $e$ 系下解算出的速度矢量 $\mathbf{v}^e$ 和姿态选择矩阵 $\mathbf{R}_b^e$ 可以通过(2.2)式的旋转矩阵 $\mathbf{R}_e^n$ 直接转换到 $n$ 系下。同时, 在 $e$ 系下建立的导航方程更加简单、解算效率更高且更容易与 GNSS 精密定位算法进行融合解算(Wei and Schwarz, 1990; 董绪荣 et al., 1998)。

惯性导航机械编排 (INS Mechanization) 是通过连续的 INS 导航微分方程推导而得到,  $e$ 系下的导航微分方程可以表示为(Jekeli, 2012):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \mathbf{v}_{eb}^e \\ \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e + \mathbf{g}^e \\ \dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \end{cases} \quad (2.27)$$

式中 $\mathbf{r}_{eb}^e$ 和 $\mathbf{v}_{eb}^e$ 分别为载体坐标系原点 (IMU 测量中心) 相对于 $e$ 系且投影到 $e$ 系下的位置和速度矢量;  $\mathbf{R}_b^e$ 为 $b$ 系到 $e$ 系的旋转矩阵;  $\mathbf{f}^b$ 为 $b$ 系下的比力矢量;  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$ 为地球自转角速度矢量在 $e$ 系下的投影;  $\mathbf{g}^e$ 为当地地球重力加速度矢量在 $e$ 系下的投影;  $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$ 为 $b$ 系相对于 $e$ 系的旋转角速度在 $b$ 系下的投影。




 图 2.3  $e$ 系下 INS 机械编排流程图

惯导机械编排的主要任务是根据加速度计和陀螺输出的测量值按照合适的数学模型解算出位置、速度、姿态等导航参数。图 2.3 给出了 $e$ 系下 INS 机械编排流程，具体而言，对陀螺测量的角速度进行积分得到载体相对于 $e$ 系的姿态矩阵完成姿态更新；利用计算出的姿态矩阵将加速度计测量的比力转换到 $e$ 系，进行重力补偿后积分得到速度信息完成速度更新；对速度进行积分后得到位置完成位置更新。接下来介绍 $e$ 系下惯性导航姿态更新、速度更新和位置更新算法。

### (1) 姿态更新

捷联惯导的姿态更新是利用陀螺测量的角速度更新姿态的过程，本文采用姿态四元数完成姿态的更新：

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{e(k-1)} = \mathbf{q}_{b(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{e(k)} = \mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{e(k-1)} \quad (2.29)$$

其中，载体坐标系的更新四元数为

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{pmatrix} \cos\|0.5\boldsymbol{\phi}_k\| \\ \frac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}_k\|}{\|0.5\boldsymbol{\phi}_k\|} 0.5\boldsymbol{\phi}_k \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

式中 $\boldsymbol{\phi}_k$ 表示将 $t_{k-1}$ 时的 $b$ 系转动到 $t_k$ 时刻的 $b$ 系所对应的等效旋转矢量。参考式(2.10)可推出工程上使用的简化等效旋转矢量微分方程为(Bortz, 1971)：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\phi}}_k &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}_k \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{12} \boldsymbol{\phi}_k \times (\boldsymbol{\phi}_k \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \\ &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\theta}_k \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (2.31)$$

根据角速度和比力的双字样假设，对(2.31)式进行积分可得(Savage, 2000)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \right] dt \\ &\approx \Delta \boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k\end{aligned}\quad (2.32)$$

其中,  $\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}$  和  $\Delta \boldsymbol{\theta}_k$  的定义参考式(2.23), 代入上式计算前需要进行陀螺测量值误差补偿, 上式中的第二项为旋转矢量的二阶圆锥误差项。式(2.29)中的  $e$  系在相邻历元的更新四元数为:

$$\mathbf{q}_{e^{(k-1)}}^{e^{(k)}} = \begin{pmatrix} \cos\|0.5\xi_k\| \\ -\frac{\sin\|0.5\xi_k\|}{\|0.5\xi_k\|} 0.5\xi_k \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

式中  $\xi_k$  表示将  $e$  系从  $t_k$  时刻转动到  $t_{k-1}$  时刻所对应的等效旋转矢量, 可根据地球自转角速度求取:

$$\xi_k = \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \Delta t \quad (2.34)$$

由于数值计算误差的影响, 姿态更新过程中  $\mathbf{q}_b^e$  会逐渐失去归一化特性, 因此, 在更新若干次后需要对  $\mathbf{q}_b^e$  进行归一化处理:

$$\mathbf{q}_b^e := (1 - e_q) \mathbf{q}_b^e \quad (2.35)$$

$e_q$  为姿态四元数的归一化误差, 如下:

$$e_q = \frac{1}{2} [(\mathbf{q}_b^e)^T \otimes \mathbf{q}_b^e - 1] \quad (2.36)$$

## (2) 速度更新

速度更新主要是对加速度计测量的比力、重力加速度和哥式加速度等各项加速度进行积分得到当前速度。对  $e$  系下的地速微分方程 (式(2.27)) 进行积分可得到速度更新方程

$$\mathbf{v}_k^e = \mathbf{v}_{k-1}^e + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^e + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^e \quad (2.37)$$

其中,  $k$  表示时刻  $t_k$ ;  $\mathbf{v}_{k-1}^e$  和  $\mathbf{v}_k^e$  分别为上一时刻和当前时刻的惯导速度;  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^e$  表示由比力引起的速度增量在  $e$  系下的投影,  $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^e$  表示由重力加速度和哥式加速度引起的速度增量在  $e$  系下的投影, 其表达式分别为:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^e = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b] dt \quad (2.38)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^e = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\mathbf{g}^e - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \mathbf{v}_{eb}^e] dt \quad (2.39)$$

式(2.38)和(2.39)中的被积分项均为时间的函数,  $\mathbf{g}^e$  为  $e$  系下的重力矢量, 可以直接通过  $e$  系下的正常重力场模型计算(董绪荣 et al., 1998), 或者对当地水平坐标系下的重力进行旋转变换得到。对于一般的载体运动 (车辆、无人机等), 由于重力矢量  $\mathbf{g}^e$  和哥式加速度项  $2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e$  均变化缓慢, 所以根据梯形积分可得  $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^e$  的简化计算形式如下:

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^e \approx (\mathbf{g}^e - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \mathbf{v}^e)_{k-0.5} \Delta t_k \quad (2.40)$$

式中  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k - 0.5$  为  $t_{k-1}$  与  $t_k$  的中间时刻。由于  $t_k$  时刻的速度尚未更新, 所以  $t_{k-0.5}$  时刻的速度需根据前面历元的数据进行外推得到。

比力积分项  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^e$  可以用  $b$  系下的比力积分项  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$  表示为:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^e = \mathbf{R}_{e(k-1)}^{e(k)} \mathbf{R}_{b(k-1)}^{e(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (2.41)$$

式中  $\mathbf{R}_{e(k-1)}^{e(k)} = \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \Delta t_k \times]$ 。假设在相邻的积分区间内比力和角速度线性变化 (双字样), 则  $b$  系下的比力积分项  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$  可表示为 (Savage, 2000; Shin, 2005):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\mathbf{R}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^b] dt \\ &\approx \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \\ &\quad \frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k) \end{aligned} \quad (2.42)$$

其中  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^b$  为  $t_k$  时刻加速度计测量值经过误差补偿后得到的速度增量在  $b$  系下的投影。上式中第二项和第三项分别为旋转效应误差补偿项和划桨效应误差补偿项, 这两项误差是由于不能同时对线加速度和角速度进行积分引起的。

### (3) 位置更新

基于速度更新值和惯性器件输出的角增量、速度增量进行位置更新的算法比较复杂, 具体可参考 (Savage, 2000; 秦永元, 2006)。由于位置矢量在  $e$  系下表示为三维空间坐标, 本文利用更新的速度值根据改进的欧拉公式进行位置更新, 如下:

$$\mathbf{r}_k^e = \mathbf{r}_{k-1}^e + 0.5 \times (\mathbf{v}_{k-1}^e + \mathbf{v}_k^e) \Delta t_k \quad (2.43)$$

式中  $\mathbf{r}_{k-1}^e$  和  $\mathbf{r}_k^e$  分别为前一时刻和当前时刻的位置矢量。

## 2.5.3 捷联惯导误差方程

由于受到惯性传感器误差、导航状态初始化误差等因素的影响, 捷联惯导机械编排得到的导航参数必然含有误差, 即惯性导航误差。惯性导航误差随时间的变化一般用惯导误差微分方程来描述。惯导误差方程可以通过经典的误差扰动分析或者数学微分的方法进行推导, 该方法将估计出来的导航参数在其真值附近进行一阶泰勒展开。下面将同时使用误差扰动和数学微分的方法推导  $\boldsymbol{\phi}$  角误差模型的位置、速度和姿态误差微分方法, 为后续滤波建模奠定基础。

### (1) 姿态误差微分方程

捷联惯导计算的带有误差的姿态矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_b^e$  可以表示成:

$$\hat{\mathbf{R}}_b^e = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times)] \mathbf{R}_b^e \quad (2.44)$$

式中  $\boldsymbol{\phi}_{be}^e$  为由计算出的姿态矩阵  $\hat{\mathbf{C}}_b^e$  而确定的  $e$  系与真实无误差的  $e$  系之间的误差角矢量。

对姿态矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_b^e$  进行误差扰动并整理后可得：

$$\delta \mathbf{R}_b^e = -(\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e \quad (2.45)$$

对(2.45)两边微分有

$$\delta \dot{\mathbf{R}}_b^e = -(\dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e - (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \dot{\mathbf{R}}_b^e \quad (2.46)$$

根据旋转矩阵的微分方程式(2.8)有：

$$\dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \quad (2.47)$$

对(2.47)两边微分有

$$\delta \dot{\mathbf{R}}_b^e = \delta \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) + \mathbf{R}_b^e (\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \quad (2.48)$$

根据(2.45)(2.46)(2.47)(2.48)，可得

$$-(\dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e - (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) = -(\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) + \mathbf{R}_b^e (\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \quad (2.49)$$

49)

对上式化简后可得：

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e \times) = -\mathbf{R}_b^e (\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \mathbf{R}_e^b \quad (2.50)$$

利用反对称矩阵的相似变换矩阵性质，上式可进一步简化为：

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e \times) = -(\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^e \times) \quad (2.51)$$

将上式写成矢量形式为：

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e) = -\mathbf{R}_b^e (\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b) \quad (2.52)$$

为了求  $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$  的误差  $\delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b$ ，可以将  $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$  表示为  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  和  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$  的函数如下：

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{R}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \quad (2.53)$$

对(2.53)式两边微分可得

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\omega}_{eb}^b &= \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \delta \mathbf{R}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \\ &= \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{R}_e^b (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \end{aligned} \quad (2.54)$$

结合(2.52)和(2.54)可得最终的姿态误差微分方程：

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e) = -\mathbf{R}_b^e \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e \quad (2.55)$$

式中  $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  为陀螺角速率测量值的误差向量。

## (2) 速度误差微分方程

对  $e$  系下的速度微分方程(2.27)两边求微分可得速度误差微分方程，如下：

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \delta \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^e \delta \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \delta \mathbf{g}^e \quad (2.56)$$

将(2.45)式代入上式并利用反对称矩阵对应的向量叉乘性质进行变换后可得：

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi}_{be}^e + \mathbf{R}_b^e \delta \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \delta \mathbf{g}^e \quad (2.57)$$

式中  $\delta \mathbf{f}^b$  为加速度计比力输出误差向量。  $\delta \mathbf{g}^e$  为重力误差矢量，可表示为位置误差的函数(董绪荣 et al., 1998)：

$$\delta \mathbf{g}^e = \mathbf{N}^e \delta \mathbf{r}_{eb}^e \quad (2.58)$$

$$\mathbf{N}^e = \frac{kM}{r^3} \begin{bmatrix} -1 + \frac{3x^2}{r^2} & \frac{3xy}{r^2} & \frac{3xz}{r^2} \\ \frac{3xy}{r^2} & -1 + \frac{3y^2}{r^2} & \frac{3yz}{r^2} \\ \frac{3xz}{r^2} & \frac{3yz}{r^2} & -1 + \frac{3z^2}{r^2} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

式中 $kM$ 为万有引力常数与地球质量的乘积； $x, y, z$ 为载体位置矢量 $\mathbf{r}_{eb}^e$ 的空间直角坐标分量； $r$ 为载体位置空间直角坐标分量的平方和。

### (3) 位置误差微分方程

位置误差微分方程可以通过对公式(2.27)两边求微分或者进行误差扰动分析后得到：

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \delta \mathbf{v}_{eb}^e \quad (2.60)$$

即 $e$ 系下位置误差微分等于 $e$ 系下速度误差。相较于当地水平坐标系的位置误差微分方程， $e$ 系下的位置误差微分方程更加直观和简单。

综上所述， $e$ 系下惯导误差模型可表示为：

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \delta \mathbf{v}_{eb}^e \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi}_{be}^e + \mathbf{R}_b^e \delta \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \delta \mathbf{g}^e \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e = -\mathbf{R}_b^e \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e \end{cases} \quad (2.61)$$

由于姿态误差是以 $\boldsymbol{\phi}$ 角进行表达的，因此这种惯导误差模型也称为 $\boldsymbol{\phi}$ 角误差模型。与 $\boldsymbol{\phi}$ 角误差模型对应的另外一种常用的惯导误差模型为用 $\boldsymbol{\psi}$ 角表示姿态误差的 $\boldsymbol{\psi}$ 角误差模型，关于这两种惯导误差模型的等价性问题的证明可参考(Benson, 1975)。

## 2.6 视觉导航基础

### 2.6.1 针孔相机模型

视觉导航是根据相机获取的序列影像实时估计相机位姿的过程，而相机成像模型则是视觉导航研究的基础。相机成像模型有多种，其中最简单和常用的就是针孔相机模型，它描述了一束光线通过针孔后在图像平面成像的映射关系。

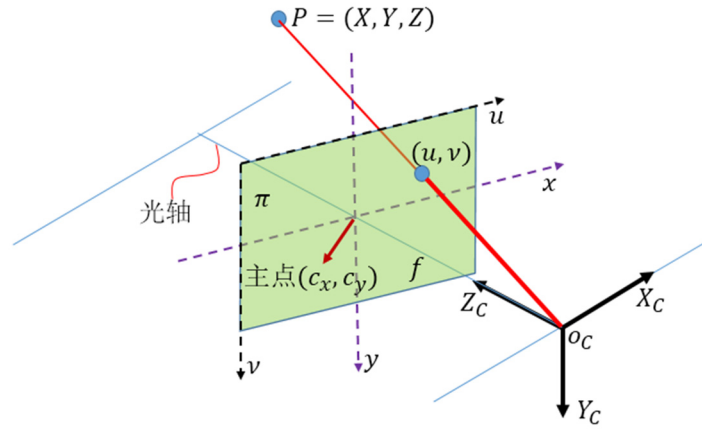


图 2.4 针孔相机透视投影模型

如图 2.4 所示， $O_C$  为相机光心，也称为投影中心， $O_C - X_C Y_C Z_C$  为相机坐标系， $Z_C$  轴为相机的主光轴并指向相机前方， $X_C$  轴向右， $Y_C$  轴向下。平面  $\pi$  为成像平面，垂直于主光轴  $Z_C$  且与其相交于像主点  $(o_x, o_y)$ 。为了简化模型通常将其放置于镜头前方，和三维空间点一起位于相机坐标系的同一侧。像主点与相机光心的几何距离为相机的焦距  $f$ 。在像平面上，以图像左上角为原点，分别以平行于成像平面上边缘和左边缘的  $u$  轴和  $v$  轴构成了图像坐标系。 $(X, Y, Z)^T$  为三维空间点  $P$  在相机坐标系下的坐标，其在成像平面上的投影点  $(u, v)^T$  为像点，它是相机光心  $O_C$  与三维空间点  $P$  的连线与成像平面  $\pi$  的交点。根据三维空间点、像点和投影点三点共线构成的投影关系，可得针孔相机的投影方程式：

$$\begin{cases} u = f_x \frac{X}{Z} + o_x \\ v = f_y \frac{Y}{Z} + o_y \end{cases} \quad (2.62)$$

式中， $f_x$  和  $f_y$  分别为经过采样和量化后的  $x$  轴和  $y$  轴方向上的焦距（以像素为单位）。

将上式写成矩阵形式为：

$$h \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X}{Z} \\ \frac{Y}{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

从上述投影方程可以看出，如果已知三维点的坐标在全球坐标系（如  $e$  系）下，那么应用上述方程前必须将其转换到相机坐标系下。设三维点  $\mathbf{x}$  在全球坐标系下的坐标为  $\mathbf{x}^G$ ，则该三维点在相机坐标系下的坐标可表示为：

$$\mathbf{x}^C = \mathbf{R}_C^G (\mathbf{x}^G - \mathbf{p}_C^G) \quad (2.64)$$

式中， $\mathbf{R}_C^G$  为全球坐标系到相机坐标系的旋转矩阵； $\mathbf{p}_C^G$  为相机坐标系原点的全球坐标系下的坐标。

由于相机镜头上透镜的制造工艺的限制，镜头都存在畸变，导致测量得到的像素坐标与相机成像投影模型计算的坐标存在差异。因此，实际的相机成像模型还需要考虑镜头畸变的影响，在利用图像数据进行视觉导航计算之前对图像的畸变进行校正。镜头畸变通常可以分为径向畸变和切向畸变，本文使用以下畸变模型：

$$h \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \left( d_r \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + d_t \right) \quad (2.65)$$

$$d_r = 1 + k_1 r + k_2 r^2 + k_3 r^3 \quad (2.66)$$

$$d_t = \begin{bmatrix} 2uv t_1 + (r + 2u^2) t_2 \\ 2uv t_2 + (r + 2v^2) t_1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$u = \frac{X}{Z}, \quad v = \frac{Y}{Z}, \quad r^2 = u^2 + v^2 \quad (2.68)$$

其中， $d_r$ 和 $d_t$ 分别为径向畸变项和切向畸变项； $(k_1, k_2, k_3)$ 为径向畸变参数， $(t_1, t_2)$ 为切向畸变参数。图2.5给出了本论文实验中使用的相机镜头的径向畸变和切向畸变示意图。从中可以看出，镜头的畸变以径向畸变主，而切向畸变较小，只有在图像边缘达到2个像素。

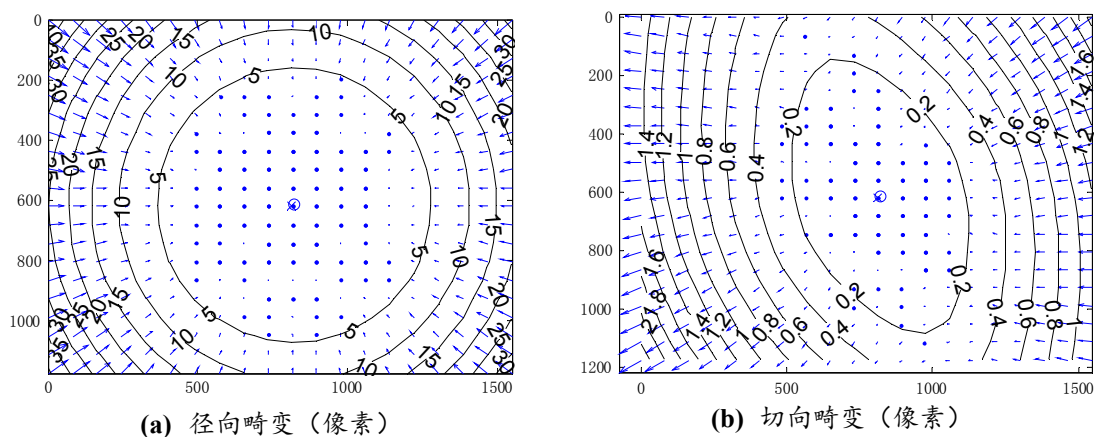


图 2.5 相机的径向畸变和切向畸变示意图。

## 2.6.2 相机标定

在视觉导航应用中，为了建立环境中的三维特征点的几何位置与图像测量到的对应点之间的投影关系，必须确定相机模型中的参数，包括焦距、主点和镜头畸变等参数，相机标定就是求解这些参数的过程。目前，相机标定的理论算法已经成熟，相机标定方法主要分为传统标定法(Tsai, 1987; Zhang, 1999)和自标定法(Brückner et al., 2014; Merras et al., 2015)。相较于自标定法，传统标定法具有精度高、可靠性好等优点，其中基于平面标定板的张式标定法由于操作简单且标定精度高而被广泛采用(Zhang, 1999)。该方法只需要对若干个在不同位置放置的标定板拍摄多张图像(图 2.6)，然后利用标定

板上的特征点与图像上对应的像点之间的关系就可求解相机内参数。本文也将采用张氏标定法进行相机标定(Bouquet, 2003), 图 2.6 给出了相机标定的重投影误差, 可以看出重投影误差由于 1 个像素。

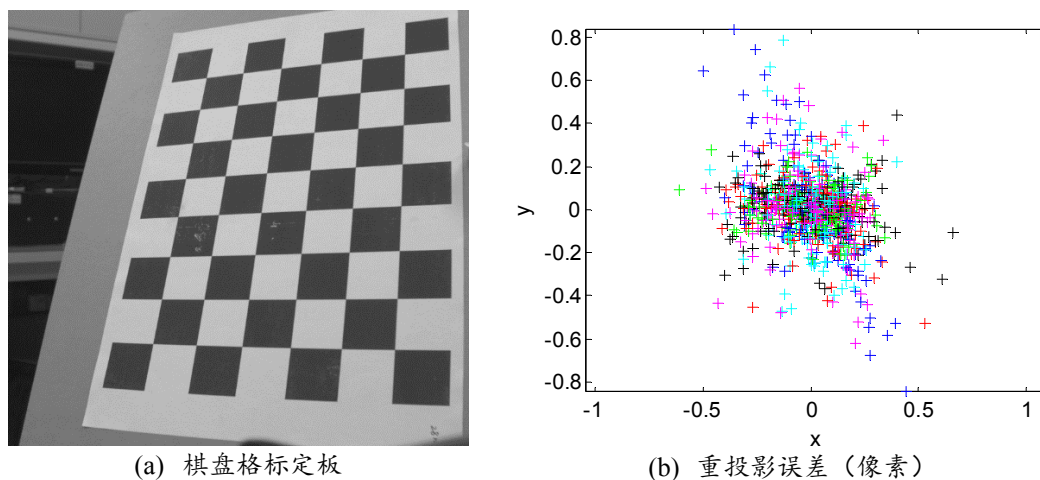


图 2.6 相机标定重投影误差.

### 2.6.3 特征点三角化

基于特征点的视觉导航方法在未知的环境中导航时, 需要根据图像测量的像素坐标计算环境中特征点的三维空间坐标。这可以通过多个在已知位置相机对同一个特征点的图像观测量进行前方交会计算出来, 也称为三角化 (或三角测量) (Triggs et al., 2000)。

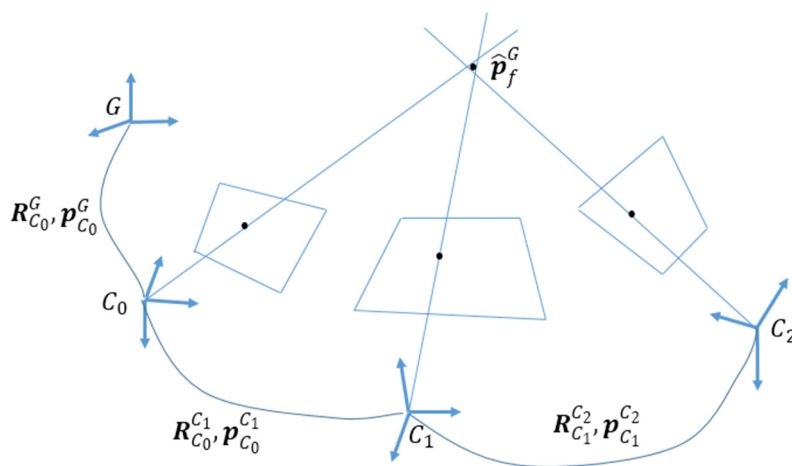


图 2.7 连续多帧跟踪到的特征点三角化示意图

假设环境中的一个特征点  $\mathbf{p}_f^G$  连续被多帧图像跟踪到 (图 2.7), 特征点的三维空间位置就是各张图像中的像素点及其投影中心连线的交点。实践中由于误差的存在, 这些直线无法相交于一点, 因此需要通过最小二乘法来求解。假设特征点在第一次被跟踪到



的相机坐标系 $\{C_0\}$ 下的位置坐标为 $(X^{C_0}, Y^{C_0}, Z^{C_0})^T$ ，则该特征点在第 $i$ 个相机坐标系 $\{C_i\}$ 下的位置坐标 $\mathbf{p}_f^{C_i} = (X^{C_i}, Y^{C_i}, Z^{C_i})^T$ 可表示为：

$$\mathbf{p}_f^{C_i} = \mathbf{R}_{C_0}^{C_i} \begin{bmatrix} X^{C_0} \\ Y^{C_0} \\ Z^{C_0} \end{bmatrix} + \mathbf{p}_{C_0}^{C_i} \quad (2.69)$$

式中， $\mathbf{R}_{C_0}^{C_i}$ 为坐标系 $\{C_0\}$ 到 $\{C_i\}$ 的旋转矩阵； $\mathbf{p}_{C_0}^{C_i}$ 为坐标系 $\{C_0\}$ 的原点在坐标系 $\{C_i\}$ 下的位置坐标。

为了避免局部最小化且获得更好的数值稳定性，可对特征点采用逆深度参数化的方法（inverse depth parameterization）（Civera et al., 2008），如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_f^{C_i} &= Z^{C_0} \left( \mathbf{R}_{C_0}^{C_i} \begin{bmatrix} X^{C_0} \\ Y^{C_0} \\ Z^{C_0} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{p}_{C_0}^{C_i} / Z^{C_0} \right) \\ &= Z^{C_0} \left( \mathbf{R}_{C_0}^{C_i} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix} + \rho \mathbf{p}_{C_0}^{C_i} \right) \\ &= Z^{C_0} \mathbf{g}_i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} = Z^{C_0} \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

其中， $\alpha$ 、 $\beta$ 和 $\rho$ 的表达式为：

$$\alpha = \frac{X^{C_0}}{Z^{C_0}} \quad \beta = \frac{Y^{C_0}}{Z^{C_0}} \quad \rho = \frac{1}{Z^{C_0}} \quad (2.71)$$

式(2.70)将坐标系 $\{C_0\}$ 的三维空间点重新参数化为 $\boldsymbol{\theta}$ ，并且将其转换到了坐标系 $\{C_i\}$ 下。将式(2.70)代入(2.63)中可得到估计出来的图像坐标，然后同该帧下对应点的图像测量值求差即可得到误差方程式：

$$f_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{z}_i - \mathbf{h}(\mathbf{g}_i(\boldsymbol{\theta})) \quad (2.72)$$

式中， $\mathbf{z}_i$ 为特征点在第 $i$ 帧图像中的测量值。因此，参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计值可以通过高斯-牛顿迭代最小化所有测量的误差平方和来得到。最后，特征点的坐标可用下式计算：

$$\hat{\mathbf{p}}_f^G = \frac{1}{\hat{\rho}} \mathbf{R}_{C_0}^G \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{p}_{C_0}^G \quad (2.73)$$

## 2.7 最优估计方法

### 2.7.1 最小二乘

最小二乘是数据处理中使用的基本参数估计方法，在 GNSS 精密定位中被广泛使用。

对于某颗卫星的距离观测量，其线性化后的误差方程可表示为：

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{L}, \mathbf{W} \quad (2.74)$$

其中， $\mathbf{L}$ 为观测向量， $\mathbf{V}$ 为观测残差向量， $\mathbf{W}$ 为观测量的权矩阵， $\mathbf{x}$ 为待估参数向量， $\mathbf{H}$ 为描述观测向量与待估参数向量之间数学关系的设计矩阵。最小二乘准则为使残差的平方和最小，即

$$\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V} = \min \quad (2.75)$$

对上式求解可得最小二乘解为

$$\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \quad (2.76)$$

GNSS 精密定位中的待估参数一般可以分为两大类：时变参数和是不变参数。在动态定位中，时变参数包括载体的三维坐标、三维速度、接收机钟差和大气延迟等，而载波相位整周模糊度等属于时不变参数。设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 分别表示时变参数向量和时不变参数向量，则(2.74)式的 GNSS 误差方程可重新表示为：

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{V}, \mathbf{W} \quad (2.77)$$

式中， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为时变和时不变参数的设计矩阵。

利用最小二乘准则可得式(2.77)的法方程为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{XX} & \mathbf{N}_{XY} \\ \mathbf{N}_{YX} & \mathbf{N}_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

将上式进行如下变换可以消去时变参数向量 $\mathbf{X}$ ：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}_{YX} \mathbf{N}_{XX}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{XX} & \mathbf{N}_{XY} \\ \mathbf{N}_{YX} & \mathbf{N}_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}_{YX} \mathbf{N}_{XX}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

整理后可得只含有时不变参数的法方程为：

$$(\mathbf{N}_{YY} - \mathbf{N}_{YX} \mathbf{N}_{XX}^{-1} \mathbf{N}_{XY}) \mathbf{Y} = -\mathbf{N}_{YX} \mathbf{N}_{XX}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{L} + \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \quad (2.80)$$

令

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} \mathbf{N}_{XX}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \quad (2.81)$$

则有：

$$\bar{\mathbf{N}}_{YY} = (\mathbf{N}_{YY} - \mathbf{N}_{YX} \mathbf{N}_{XX}^{-1} \mathbf{N}_{XY}) = \mathbf{B}^T (\mathbf{I} - \mathbf{J})^T \mathbf{W} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{B} \quad (2.82)$$

令

$$\bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{B} \quad (2.83)$$

则法方程式(2.80)可表示为：

$$\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{W} \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \quad (2.84)$$

上式可以看成是如下新的观测方程对应的法方程：

$$\bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{V}, \mathbf{W} \quad (2.85)$$

该法方程的最小二乘估计为：

$$Y = (\bar{B}^T W \bar{B})^{-1} \bar{B}^T W L \quad (2.86)$$

进而可以求取包含接收机位置坐标等时变参数的向量:

$$X = N_{XX}^{-1} (A^T W L - N_{XY} Y) \quad (2.87)$$

上面求取的待估参数是单历元最小二乘解, 如果有多个历元数据则可以直接进行序贯最小二乘估计, 即将法方程式(2.84)进行叠加。可以看出, 序贯最小二乘不需要对历史观测数据进行存储, 只需要将当前的法方程叠加到之前历元对应的法方程上就可利用之前的所有信息对当前状态参数进行估计。

### 2.7.2 卡尔曼滤波

卡尔曼滤波算法作为一种重要的最优估计算法已被广泛用于各种工程领域中 (Kalman, 1960; Gelb, 1974; Maybeck, 1982; Brown and Hwang, 1992), 多源融合导航算法设计是其被成功应用的一个重要方面。Kalman 滤波充分利用系统方程、观测方程的确定性和系统状态噪声、量测噪声等不确定性对当前的状态进行估计。在给出了滤波初值后, Kalman 滤波通过一组递推公式进行计算, 不需要保存和重新处理历史观测数据, 因此滤波算法一般是能实时运行的。卡尔曼滤波分为连续型和离散型, 连续型卡尔曼滤波一般用于理论分析, 而离散型卡尔曼滤波一般用于算法的计算机实现。下面简单介绍离散型卡尔曼滤波, 它是本文多源融合导航算法设计的基础。

假设离散线性系统的状态方程和量测方程为:

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} w_{k-1} \quad (2.88)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (2.89)$$

其中,  $x_k$  和  $x_{k-1}$  分别是  $t_k$  和  $t_{k-1}$  时刻的状态向量;  $\Phi_{k,k-1}$  为  $t_{k-1}$  到  $t_k$  时刻的状态转移矩阵, 确定了状态向量随时间的变化规律;  $\Gamma_{k-1}$  为系统噪声驱动矩阵;  $w_{k-1}$  为  $t_{k-1}$  时刻的系统状态噪声向量;  $z_k$  为  $t_k$  时刻的量测向量;  $H_k$  为系统设计矩阵 (量测矩阵), 确定了观测量与系统状态的关系;  $v_k$  为量测噪声向量。同时, 系统状态噪声向量  $w_{k-1}$  和量测噪声向量  $v_k$  需满足如下统计特性:

$$\begin{cases} v_k \sim N(0, R_k) \\ w_k \sim N(0, Q_k) \\ E(v_k w_j^T) = 0, \text{ 对任意的 } k, j \end{cases} \quad (2.90)$$

式中,  $R_k$  为量测噪声方差阵;  $Q_k$  为系统状态噪声方差阵 (Gelb, 1974; Maybeck, 1982)。

针对以上系统状态方程和量测方程, 以及相关的噪声统计特性, 卡尔曼滤波的信息更新可以通过时间更新和量测更新两个过程完成。其中, 时间更新也成为预测, 状态向量及其协方差的一步预测可写为 (Brown and Hwang, 1992):

$$\mathbf{x}_{k,k-1}^- = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (2.92)$$

式中,  $\mathbf{x}_{k,k-1}^-$  是对当前状态的一步预测值;  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  为  $t_{k-1}$  时刻系统状态的滤波估计值;  $\mathbf{P}_{k,k-1}$  为  $t_{k-1}$  到  $t_k$  时刻的一步预测误差协方差矩阵;  $\mathbf{P}_{k-1}$  为  $t_{k-1}$  时刻滤波估计的系统状态误差协方差矩阵。

在测量更新的过程中需要首先计算卡尔曼增益矩阵, 然后才能完成系统状态及其误差协方差矩阵的更新, 方程如下:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.93)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_{k,k-1}^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k,k-1}^-) \quad (2.94)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.95)$$

式(2.91)-(2.95)即为离散卡尔曼滤波的基本方程。其中, 协方差矩阵  $\mathbf{P}_k$  的更新有多种表达式, (2.95)的更新表达式为 Joseph 形式, 由于它能够保证  $\mathbf{P}_k$  的正定性和对称性 (Maybeck, 1982), 因此工程实践中被广泛使用。

从以上公式中可以看出, 只要给定了系统状态及其协方差矩阵初值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和  $\mathbf{P}_0$ , 并设定出观测噪声矩阵  $\mathbf{R}_k$  和系统动态噪声矩阵  $\mathbf{Q}_k$ , 卡尔曼滤波就可以利用当前的观测数据进行更新完成系统状态的最优估计。

### 2.7.3 最优平滑

卡尔曼滤波算法的实时性决定了其只能利用历史的和当前时刻的测量信息来估计系统当前状态, 这对于事后处理应用来讲数据的利用率不充分(张全, 2015; 陈起金, 2016)。最优平滑算法的目的是使用所有过去的, 当前的和未来的数据对系统状态进行估计, 从而获取更高的状态估计精度。常用的最优平滑算法有固定点平滑、固定滞后平滑和固定区间平滑, 具体可参考文献(Maybeck, 1982; 秦永元 et al., 1998)。固定点平滑一般用于估计系统在某个特定时刻的状态, 而固定滞后平滑则是估计系统在某个固定滞后时刻的状态。固定区间平滑是利用时间区间里的所有观测数据来估计出区间中每个时刻的系统状态, 常用于后处理高精度应用。本文采用固定区间平滑算法获取高精度的位姿估计结果作为参考值, 用于评估实时滤波算法的性能。

一般来讲, 平滑算法的结果是正反向滤波最优估计结果的组合, 其公式描述如下 (Shin, 2005):

$$\mathbf{P}_{sm} = (\mathbf{P}_f^{-1} + \mathbf{P}_b^{-1})^{-1} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{x}}_{sm} &= \boldsymbol{P}_{sm}(\boldsymbol{P}_f^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_f + \boldsymbol{P}_b^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_b) \\
 &= \boldsymbol{P}_{sm}(\boldsymbol{P}_f^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_f + \boldsymbol{P}_b^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_f - \boldsymbol{P}_b^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_f + \boldsymbol{P}_b^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_b) \\
 &= \hat{\boldsymbol{x}}_f + \boldsymbol{P}_{sm}\boldsymbol{P}_b^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_b - \hat{\boldsymbol{x}}_f)
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

式中，下标 $sm$ 、 $f$ 和 $b$ 分别表示平滑、正向滤波和反向滤波对应的量； $\hat{\boldsymbol{x}}_f$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_b$ 分别是正向滤波和反向滤波估计的同一时刻系统状态量； $\boldsymbol{P}_f$ 和 $\boldsymbol{P}_b$ 分别为正向滤波和反向滤波对应的协方差矩阵； $\hat{\boldsymbol{x}}_{sm}$ 为平滑算法估计的系统状态量， $\boldsymbol{P}_{sm}$ 为其协方差矩阵。

虽然基于前向-后向滤波的平滑算法直观且易于理解，但是需要开发全套的反向滤波算法，增加了算法的复杂度和计算量。1965年 H. Rauch 等人提出了一种著名的固定区间平滑算法，即 RTS (Rauch-Tung-Striebel) 算法(Rauch et al., 1965)。该算法取消了反向滤波，将平滑估计看成是对前向滤波估计结果进行修正的过程(张全, 2015; 陈起金, 2016)。RTS 算法虽然不直接进行反向滤波处理，但是其等效于正、反向滤波的最优组合，其基本公式如下(Brown and Hwang, 1992):

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k/N} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k} + \boldsymbol{A}_k(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1/N} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1/k}) \tag{2.98}$$

$$\boldsymbol{P}_{k/N} = \boldsymbol{P}_{k/k} + \boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{P}_{k+1/N} - \boldsymbol{P}_{k+1/k})\boldsymbol{A}_k^T \tag{2.99}$$

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{P}_{k/k}\boldsymbol{\Phi}_k^T\boldsymbol{P}_k^{-1} \tag{2.100}$$

式中 $\boldsymbol{A}_k$ 为平滑增益矩阵， $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$ ， $N$ 为观测信息的总数。从以上公式可以看出，RTS 平滑算法需要将正向滤波计算过程中的状态量 $\boldsymbol{x}$ 及其误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，和状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 进行记录保存，当正向滤波完成后从记录数据的末尾开始进行反向平滑处理。由于正向滤波的每一步都需要保存以上矩阵的信息，因此 RTS 算法对数据存储的要求很高。

## 2.8 GNSS/INS 松组合数学模型

组合导航是指将两种及以上的导航系统适当地组合在一起，实现优势互补并获得比单独使用其中任何一种导航系统更优地导航性能。卡尔曼滤波作为一种重要的最优估计算法被广泛应用于诸多领域，组合导航系统的滤波设计就是一个重要方面。在众多组合导航系统中，GNSS 和 INS 之间的优良互补特性使得 GNSS/INS 组合导航被广泛关注和研究。本节给出 GNSS/INS 松组合卡尔曼滤波算法模型，为后面的紧组合算法研究奠定基础，其具体框图如图 2.8 所示。INS 在初始化后通过机械编排算法可输出连续的位置、速度和姿态等导航结果，同时卡尔曼滤波器将融合 GNSS 和 INS 的位置、速度信息对导航误差和惯性传感器误差进行在线估计。估计出来的导航误差将用于修正机械编排得到的导航结果以限制惯导误差的积累，而估计出来的传感器误差则用于 IMU 误差补偿。

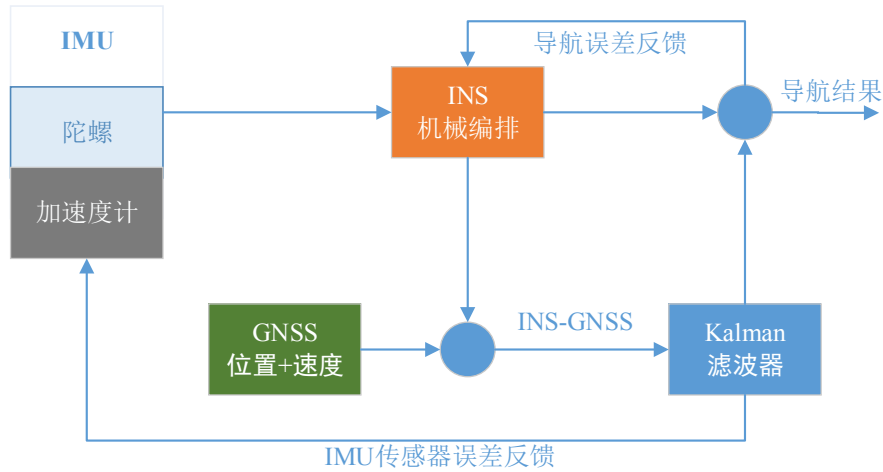


图 2.8 松组合 Kalman 滤波算法流程图

### 2.8.1 系统误差状态模型

由于 GNSS/INS 组合导航系统是非线性系统，为了解决系统的非线性问题，GNSS/INS 组合导航算法通常采用误差状态扩展卡尔曼滤波来实现。根据前文介绍的惯导误差微分方程式(2. 61)和惯性传感器误差模型，将陀螺和加速度计零偏、比例因子误差增广到滤波系统状态中，可得到 GNSS/INS 组合导航卡尔曼滤波的连续时间误差状态方程为：

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (2. 101)$$

其中， $\mathbf{F}(t)$ 为系统误差状态的转移矩阵； $\mathbf{G}(t)$ 为系统噪声驱动矩阵； $\mathbf{w}(t)$ 为系统噪声。 $\delta \mathbf{x}(t)$ 为 $t$ 时刻的系统误差状态向量，可表示为：

$$\delta \mathbf{x}(t) = [(\delta \mathbf{r}_{eb}^e)^T \quad (\delta \mathbf{v}_{eb}^e)^T \quad (\boldsymbol{\phi}_{be}^e)^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{s}_g^T \quad \mathbf{s}_a^T]^T \quad (2. 102)$$

式中， $\delta \mathbf{r}_{eb}^e$ 、 $\delta \mathbf{v}_{eb}^e$ 和 $\boldsymbol{\phi}_{be}^e$ 分别表示惯导位置误差向量、速度误差向量和姿态误差向量； $\mathbf{b}_g$ 和 $\mathbf{b}_a$ 分别为陀螺和加速度计的零偏误差向量； $\mathbf{s}_g$ 和 $\mathbf{s}_a$ 分别为陀螺和加速度计的比例因子误差向量。由于比例因子误差和零偏误差具有强相关性而耦合在一起进而不具备可观性(Hong et al., 2005)，所以实际滤波建模时也可以不考虑比例因子误差。

为了得到离散时间系统误差状态方程，可将式(2. 101)离散化，如下：

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2. 103)$$

其中， $\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}$ 为状态转移矩阵； $\mathbf{w}_k$ 为驱动白噪声，其表达式为：

$$\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} = \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(t)dt\right) \quad (2. 104)$$

$$\mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t)\mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)dt \quad (2. 105)$$

当 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 很小时， $\mathbf{F}(t)$ 在这段时间内可近似为常值，因此状态转移矩阵可取一阶

近似为:

$$\Phi_{k+1,k} = \exp(\mathbf{F}(t_k)\Delta t) \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}(t_k)\Delta t \quad (2.106)$$

由于驱动白噪声序列是不相关的零均值序列, 因此 $\mathbf{w}_k$ 的协方差矩阵可表示为(Brown and Hwang, 1992):

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T) = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2.107)$$

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) \mathbf{Q} \mathbf{G}^T(t) \Phi^T(t_{k+1}, t) dt \quad (2.108)$$

上式中 $\mathbf{Q}$ 为驱动白噪声序列 $\mathbf{w}_k$ 方差强度; 对上式进行梯形积分后可得(Maybeck, 1982):

$$\mathbf{Q}_k \approx \frac{1}{2} [\Phi_{k+1,k} \mathbf{G}(t_k) \mathbf{Q}(t_k) \mathbf{G}^T(t_k) \Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{G}(t_{k+1}) \mathbf{Q}(t_{k+1}) \mathbf{G}^T(t_{k+1})] \Delta t \quad (2.109)$$

## 2.8.2 GNSS 位置观测模型

GNSS 定位算法通常给出的位置坐标在天线相位中心的, 而捷联惯导机械编排给出的位置为 IMU 测量中心, 实际中二者无法安装到同一点, 它们之间的位置偏差称为杆臂。设 GNSS 在 $e$ 系下的位置向量为 $\mathbf{r}_{e,GNSS}^e$ , IMU 测量中心在 $e$ 系下的位置向量为 $\mathbf{r}_{e,IMU}^e$ , 考虑到杆臂效应则存在如下关系:

$$\mathbf{r}_{e,GNSS}^e = \mathbf{r}_{e,IMU}^e + \mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \quad (2.110)$$

式中 $\boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU}$ 为杆臂向量, 即 IMU 测量中心到 GNSS 天线相位中心的向量在 IMU 系( $b$ 系)下的投影, 其值可以通过高精度的测量获得。

由上式可以得到惯导推算的 GNSS 天线相位中心的位置为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{e,GNSS}^e &= \hat{\mathbf{r}}_{e,IMU}^e + \hat{\mathbf{R}}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \\ &= \mathbf{r}_{e,IMU}^e + \delta \mathbf{r}_{e,IMU}^e + (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times)) \mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \\ &= \mathbf{r}_{e,GNSS}^e + \delta \mathbf{r}_{e,IMU}^e + ((\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU}) \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e \end{aligned} \quad (2.111)$$

如果将 GNSS 定位算法给出的位置当做测量值则有:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{e,GNSS}^e = \mathbf{r}_{e,GNSS}^e + \mathbf{e}_r \quad (2.112)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{r}}_{e,GNSS}^e$ 为位置测量值,  $\mathbf{e}_r$ 为 GNSS 位置测量误差。综合方程(2.111)和(2.112)即可得到 GNSS 位置观测方程:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z}_r &= \hat{\mathbf{r}}_{e,GNSS}^e - \tilde{\mathbf{r}}_{e,GNSS}^e \\ &= \delta \mathbf{r}_{e,IMU}^e + ((\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}) \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e - \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.113)$$

## 2.8.3 GNSS 速度观测模型

GNSS 在 $e$ 系下的三维速度一般可以通多普勒或者载波相位观测值求出。为了得到 GNSS 天线相位中心与 IMU 测量中心的速度关系, 将等式(2.110)两边同时对时间求导

可得:

$$\mathbf{v}_{e,GNSS}^e = \mathbf{v}_{e,IMU}^e + \mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \quad (2.114)$$

其中,  $(\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times)$  可以表示为

$$(\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) = (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \quad (2.115)$$

将(2.115)代入(2.114)并利用反对称矩阵的相似变换性质  $(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) = \mathbf{R}_e^b(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \mathbf{R}_b^e$ , 最终可推得

$$\mathbf{v}_{e,GNSS}^e = \mathbf{v}_{e,IMU}^e + \mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \quad (2.116)$$

由上式可以得到 INS 推算的 GNSS 天线相位中心的速度为:

$$\hat{\mathbf{v}}_{e,GNSS}^e = \hat{\mathbf{v}}_{e,IMU}^e + \hat{\mathbf{R}}_b^e(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times) \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \hat{\mathbf{R}}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \quad (2.117)$$

对上式进行误差扰动并略去二阶小量后整理可得:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{e,GNSS}^e \approx & \mathbf{v}_{e,GNSS}^e + \delta \mathbf{v}_{e,IMU}^e + \mathbf{R}_b^e(\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} - \\ & (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} + (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) (\boldsymbol{\phi}_{be}^e \times) \mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \end{aligned} \quad (2.118)$$

GNSS 解算得到的天线相位中心的速度测量值可表示为:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{e,GNSS}^e = \mathbf{v}_{e,GNSS}^e + \mathbf{e}_v \quad (2.119)$$

式中,  $\mathbf{e}_v$  为速度测量误差。速度观测方程可表示为惯导推算的速度与 GNSS 速度测量值之差:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z}_v = & \hat{\mathbf{v}}_{e,GNSS}^e - \tilde{\mathbf{v}}_{e,GNSS}^e = \delta \mathbf{v}_{e,IMU}^e - \mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \\ & [(\mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU}) \times] \boldsymbol{\phi}_{be}^e - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) (\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\ell}_{IMU,GNSS}^{IMU} \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e - \mathbf{e}_v \end{aligned} \quad (2.120)$$

## 2.9 本章小结

本章主要对 GNSS 定位、惯性导航、视觉融合和组合导航等方面的数学基础进行了综合介绍。首先, 介绍了组合导航中的常用坐标系、姿态参数化以及 GNSS 定位中的观测量与误差处理方法; 然后, 阐述了惯性导航技术基础, 包括惯性传感器误差建模、地心地固坐标系下的惯导机械编排算法和基于  $\boldsymbol{\phi}$  角误差模型的惯导误差方程的推导; 接着介绍了视觉导航中用于描述视觉观测量的针孔相机模型、相机标定以及求取特征点坐标的三角化方法等; 最后, 介绍了组合导航中常用的最小二乘、卡尔曼滤波和最优平滑等最优估计方法, 并构建了 GNSS/INS 松组合算法的滤波模型, 包括系统误差状态方程和位置、速度观测方程的建立过程。



### 3 单频多模 RTK/INS 紧组合滤波模型

#### 3.1 引言

如第一章所述,多系统 GNSS 可极大地提高了单频 RTK 的模糊度固定率与可靠性,使得低成本获取高精度定位成为可能。虽然针对单频多模 GNSS RTK 的研究已经较为丰富,但是多数研究均利用静态数据或者开阔天空环境下的动态数据来测试单频多模 RTK 的模糊度固定性能。然而,在 GNSS 复杂环境下单频多模 RTK 的可用性、可靠性等必然会显著降低。针对此问题,本章将深入研究基于低成本 MEMS-IMU 的单频多模 RTK/INS 紧组合技术,证明其在复杂 GNSS 环境下进行高精度定位的可行性。同时,针对观测粗差问题,提出相应的抗差模型进一步提高 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率和可靠性。最后,通过两组车载测试数据全面评估了低成本单频多模 RTK/INS 紧组合的模糊度固定与定位性能。

本章具体内容安排如下:3.2 节介绍了 GPS、BDS 和 GLOANSS 三种系统的时空基准及其统一的方法;3.3 节详细推导了单频 GPS+BDS+GLONASS 三系统 RTK 定位的数学模型,包括函数模型和随机模型;3.4 节讨论了两种 RTK/INS 紧组合的数学模型,包括各自的状态方程、观测方程的建立以及 INS 辅助模糊度固定的方法;3.5 节提出了 RTK/INS 紧组合算法的两步抗差模型;3.6 节阐述了 RTK/INS 紧组合算法的整体框架流程;3.7 节通过实测车载数据对紧组合算法进行了验证和评估;3.8 节对本章内容进行小结。

#### 3.2 多模 GNSS 融合定位时空基准

时间和空间是物体存在的基本形式,二者也是实现 GNSS 定位的基础(李征航和黄劲松,2010)。GPS、BDS 和 GLONASS 分别是美国、中国和俄罗斯建立的卫星导航系统,三者采用的时间系统和空间系统均不相同。因此,在利用三种系统观测数据进行融合定位时,需要建立起统一的时空基准。下面将简单的介绍三种系统各自的时间系统和坐标系统,并给出它们之间的差异以及基准统一的方法。

##### 3.2.1 时间系统

GNSS 定位使用的距离观测量本质上是对时间的精确测量,因此维持精密的时间系统是实现 GNSS 定位的基本条件。由于原子时具有极好的时间稳定性,因此被各个卫星导航系统所采用,只是不同的卫星导航系统使用了各自的原子钟系统来建立其时间系统。

###### (1) GPS 时

GPS 时 (GPST) 是一种以美国海军天文台维持的协调世界时 (Coordinated Universal Time, UTC) 为参考的一种原子时系统, 时间起点为 1986 年 1 月 6 日零点, 计数方式采用 GPS 周和周内秒 (GPS ICD, 2013)。由于 GPS 时是连续的时间系统, 而 UTC 则是会不定期发生跳秒的非连续时间系统, 所以 GPS 时和 UTC 时存在一个整数秒偏差。此外, GPS 时和 UTC 时使用了不同的原子钟系统进行时间维持, 两者之间还存在一个小的漂移偏差, 二者的关系如下:

$$UTC - GPST = n_G + C_0 \quad (3.1)$$

其中,  $n_G$  为跳秒数,  $C_0$  为 GPS 时与 UTC 之间的时间漂移偏差。

#### (2) 北斗时

北斗时 (BDT) 是由国家授时中心维持的 UTC (局部) 通过与国际 UTC 建立联系的一种原子时系统 (CSNO, 2013), 其起始历元为 2016 年 1 月 1 日零时整 (UTC), 也采用周和周内秒的方式计数。BDT 也是一个连续的原子时系统, 与 UTC 之间也存在一个整数秒偏差  $n_c$  和微小时间偏差  $C_1$ :

$$UTC - BDT = n_c + C_1 \quad (3.2)$$

#### (3) GLONASS 时

GLONASS 时 (GLONASST) 是按照俄罗斯联邦的国家时间确定的一种原子时系统, 与 UTC 存在 3 小时的偏差。同时, GLONASS 时不是连续的时间系统, 与 UTC 一样存在相同的跳秒, 因此它与 UTC 没有整数秒的差异。此外, 由于 GLONASS 时是由其自身系统的原子钟维持的, 所以它和 UTC 之间还存在微小的时间偏差  $C_2$ 。GLONASS 时和 UTC 之间的关系可表示为:

$$UTC + 3h = GLONASST + C_2 \quad (3.3)$$

#### (4) 时间系统的统一

从以上讨论可知, GPS 时、BDT 和 GLONASS 时均是由各自系统的原子钟维持的原子时, 且它们之间存在一个微小时间偏差。由于国际 UTC 是由全球约 240 台原子钟系统维持的全球统一和公认的时间系统, 因此通常将 UTC 作为时间标准, 其它卫星导航系统之间的时间偏差通过 UTC 建立联系, 从而实现不同时间系统的统一。不同 GNSS 时间系统与 UTC 的关系的详细讨论可参考 (Lewandowski and Arias, 2011)。

### 3.2.2 坐标系统

GNSS 定位中需要建立坐标系统来描述运动载体的位置、速度和轨迹等, GPS、BDS 和 GLONASS 均有其各自的坐标系统, 即美国的 1984 世界大地坐标系统 (World Geodetic System 1984, WGS84)、中国的 2000 大地坐标系 (China Geodetic Coordinate System 2000, CGCS2000) 和俄罗斯的 PZ-90 (Parametry Zemli 1990) 坐标系。下面对其进行简单介绍

并给出三种坐标系统实现统一的方法。

#### (1) WGS84 坐标系

WGS84 坐标系是美国国防部在 80 年代初利用子午卫星的观测数据建立起来的一种地心坐标系，其原点为地球质心，Z 轴指向国际地球自转服务组织（International Earth Rotation Service, IERS）定义的参考极，X 轴指向对应的参考子午线与过原点且垂直于 Z 轴的平面的交点，Y 轴则与 X 轴和 Z 轴共同构成右手直角坐标系（GPS ICD, 2013）。为了提高坐标框架的精度，WGS84 坐标系经过了多次精化更新，最新的 WGS84（G1674）于 2012 年投入使用，且与国际上公认的精度最高的国际地球参考框架（International Terrestrial Reference Frame, ITRF）之间的差异很小。

#### (2) CGCS2000 坐标系

中国的北斗系统采用的坐标系为 2000 中国大地坐标系，其定义为：原点位于地球的质量中心，Z 轴指向国际地球自转服务组织定义的参考极，X 轴为 IERS 定义的参考子午面与赤道面的交线，Y 轴则与 X 轴和 Z 轴共同构成右手直角坐标系（CSNO, 2013）。CGCS2000 坐标参考框架是 2000 国家 GPS 大地网的约 2600 个点在 2000.0 历元下的坐标和速度的具体实现，因此可认为是 ITRF97 于 2000.0 历元在中国地区的实现(魏子卿, 2008)。

#### (3) PZ-90 坐标系

GLONASS 系统使用的参考坐标系为 PZ-90 坐标系，其定义为：原点位于地球质心，Z 轴指向 IERS 指定的协议地极，X 轴指向地球赤道平面与国际时间局（Bureau International de l'Heure, BIH）建立的参考子午线交点，Y 轴则与 X 轴和 Z 轴共同构成右手直角坐标系（GLONASS ICD, 2008）。PZ-90 坐标系经过了两次改化，分别为 2002 年改化后的版本 PZ-90.02 和 2011 年改化后的版本 PZ-90.11。最新的 PZ-90.11 版本的坐标系在坐标轴、坐标轴向和尺度上与 ITRF2008 的参数仅存在厘米级差异。

#### (4) 坐标系统的统一

由于 GPS、BDS 和 GLONASS 各自采用的坐标系统的定义和框架实现存在差异，因此在利用它们的数据进行组合定位时需要将各自坐标系下的位置坐标统一到同一个坐标系下。由于 GPS 系统使用的 WGS84 坐标系和坐标参考框架 ITRF 的差异很小，可以不加区分，因此数据融合时以 WGS84 坐标系作为统一的坐标系，然后分别将 CGCS2000 和 PZ-90 坐标系下的坐标转换到 WGS84 坐标系下。由于 CGCS2000 是 ITRF97 在中国地区的实现，而 WGS84 与 ITRF 在坐标系的实现精度内是一致的，因此可认为 CGCS2000 与 WGS84 是相容的(魏子卿, 2008)。对于 GLONASS 而言，最新的 PZ-90.11 与 ITRF2008 的差异仅仅为厘米级，因此采用 GLONASS 广播星历进行短距离的基线解算时，完全可以忽略坐标转换引起的误差。

### 3.3 单频多模 RTK 数学模型

GNSS RTK 定位的数学模型包括函数模型和随机模型，函数模型描述了 GNSS 观测量与待估参数之间的数学关系，而随机模型则描述了观测量的精度统计特性，一般用方差-协方差矩阵来描述。数学模型建立后，可以根据最小二乘准则对观测数据进行平差处理，得到待估参数的最小二乘估计。

#### 3.3.1 函数模型

对于 GNSS 定位来说，函数模型就是确定 GNSS 观测量（伪距和载波相位）与待估参数（如接收机的三维位置坐标、接收机钟差和整周模糊度等）之间的函数关系式，也即 2.4.1 介绍的 GNSS 观测方程。在相对定位中采用双差观测模型，为方便描述，将伪距和载波相位双差观测方程式重新列出，如下：

$$\nabla\Delta P_{br}^{jk} = \nabla\Delta\rho_{br}^{jk} + \nabla\Delta T_{br}^{jk} + \nabla\Delta I_{br}^{jk} + \varepsilon_{\nabla\Delta P,br}^{jk} \quad (3.4)$$

$$\lambda\nabla\Delta\varphi_{br}^{jk} = \nabla\Delta\rho_{br}^{jk} + \nabla\Delta T_{br}^{jk} - \nabla\Delta I_{br}^{jk} + \lambda\nabla\Delta N_{br}^{jk} + \varepsilon_{\nabla\Delta\varphi,br}^{jk} \quad (3.5)$$

其中， $\nabla\Delta$ 为双差算子，其他参数的含义与(2.14)、(2.15)中的一致。由于本文主要针对单频观测值且基线长度小于 10 km 的短基线，因此双差电离层延迟 $\nabla\Delta I$ 和对流层延迟 $\nabla\Delta T$ 均可以忽略，剩余的待估参数为接收机的三维坐标改正数和模糊度参数。

与 GPS 和北斗的码分多址 (Code Division Multiple Access, CDMA) 不同，GLONASS 采用了频分多址 (Frequency Division Multiple Access, FDMA) 技术，因此不同卫星的频率不同，从而导致 GLONASS 伪距和载波相位测量值通过双差后无法消除硬件延迟偏差。这种由于不同通道而引起的硬件延迟偏差称为通道间偏差 (Inter-Channel Bias, ICB)，根据观测类型不同，可将其分为伪距 ICB 和相位 ICB。由于伪距 ICB 与频率、接收机类型等相关且无法使用简单函数来模型化(Al-Shaery et al., 2013; Shi et al., 2013)，因此在利用 GLONASS 伪距时，通常对其进行降权处理。然而，要实现 GLONASS 模糊度固定，必须对相位 ICB 进行校准或者估计。

相较于伪距 ICB，相位 ICB 则有如下一些特性(Wanninger and Wallstab-Freitag, 2007; Wanninger, 2012)：相位 ICB 可以表示为卫星间的通道数之差与 GLONASS 接收机之间的频间偏差 (Inter-Frequency Bias, IFB) 的乘积；频间偏差 IFB 与接收机的类型有关，同一接收机厂商生产的接收机 IFB 基本相等，而且基本不随时间变化，比较稳定。根据以上接收机 IFB 的特性，数据处理中主要有两种方法：事先标定和实时估计。

##### (1) 事先标定

由于接收机的 IFB 与接收机的类型有关且不随时间变化，因此可以利用零基线(Al-

Shaery et al., 2013)或者短基线(Wanninger and Wallstab-Freitag, 2007)的观测数据对接收机的 IFB 进行标定, 然后建立不同接收机的 IFB 值查询表(Wanninger, 2012)。在数据处理中即可利用该 IFB 值进行模糊度固定, 模糊度固定后可进一步对该 IFB 值进行精化。

## (2) 实时估计

由于 IFB 与模糊度等参数具有强相关性, 因此将它们一起进行估计通常需要很长的时间才能收敛。Tian et al. (2015)基于最优的 IFB 将对应模糊度解算的最大 ratio 值的假设, 并根据 IFB 分布在-0.1 m 到 0.1 m 区间内的条件, 将区间等分为 200 份, 利用每一份对应的 IFB 值进行模糊度解算并得到对应的 ratio 值, 然后利用粒子滤波对 IFB 参数进行估计。隋心 et al. (2018)基于上述思想, 提出了基于粒子群优化的方法实时估计 IFB, 有效提高了估计的效率。

本文采取事先对 IFB 进行精确标定的数据处理策略, 然后再进行 GLONASS 模糊度解算。GLONASS 模糊度解算过程中的另外一个问题是在以米为单位的相位观测方程中双差模糊度不具备整周特性, 而以周为单位的相位观测方程则无法消除接收机的相对钟差。第二种方法中虽然可以利用伪距先求解出接收机钟差, 然后再解算模糊度(Han et al., 1999), 但是要获得较高的钟差精度就需要较高的伪距观测精度(段举举和沈云中, 2012)。第一种方法则需要将模糊度进行变换, 将两颗卫星的单差模糊度转换为一个与参考卫星有关的单差模糊度和一个双差模糊度, 如下:

$$\lambda \nabla \Delta \varphi_{br}^{jk} = \lambda^k \Delta \varphi_{br}^k - \lambda^j \Delta \varphi_{br}^j \quad (3.6)$$

$$\lambda \nabla \Delta N_{br}^{jk} = \lambda^k \Delta N_{br}^k - \lambda^j \Delta N_{br}^j = \lambda^k \nabla \Delta N^{jk} + (\lambda^k - \lambda^j) \Delta N^j \quad (3.7)$$

其中, 参考卫星的单差模糊度可利用多个历元的伪距观测值取平均得到, 也可以通过双差观测方程搜索得到(Wang, 2000)。由于单差模糊度的精度能满足双差模糊度固定的要求且不影响基线解算精度(段举举和沈云中, 2012), 本文将采用这种方法处理 GLONASS 观测值。

对于 GPS、BDS 和 GLONASS 三系统的数据融合, 由于不同的系统卫星信号的频率不同, 如果采用系统间形成双差的模式(也称为紧组合模式)将会引入系统之间的相对硬件延迟偏差, 而且双差模糊度也会失去整周特性(邓辰龙, 2016), 因此也使得模糊度解算变得复杂。因此, 本文将采用各个系统间分别选择参考卫星然后形成双差观测方程的方式对 GPS、BDS 和 GLONASS 数据进行融合, 同时估计接收机的三维位置坐标和各系统的双差模糊度。

综上所述, 联立(3.4)、(3.5)、(3.6)、(3.7)并对观测方程进行线性化, 可得到 GNSS 观测量与接收机三维位置坐标、各系统模糊度等待估参数之间关系的方程为:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{H} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_r \\ \nabla \Delta \mathbf{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla \Delta \mathbf{P} - \nabla \Delta \mathbf{r}_0 \\ \lambda \nabla \Delta \boldsymbol{\varphi} - \nabla \Delta \mathbf{r}_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^G \quad \mathbf{H}^C \quad \mathbf{H}^R]^T \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\Lambda}^G \quad \boldsymbol{\Lambda}^C \quad \boldsymbol{\Lambda}^R) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}^G \quad \mathbf{N}^C \quad \mathbf{N}^R]^T \quad (3.11)$$

其中,  $n$  为三系统的模糊度总个数;  $\delta \mathbf{p}_r$  为基线改正数向量;  $\nabla \Delta \mathbf{r}_0$  为利用接收机近似坐标和卫星坐标计算的几何双差距离; 上标 G、C、R 分别表示 GPS、BDS 和 GLONASS 系统;  $\mathbf{H}$  为设计矩阵, 由各颗卫星的双差方向余弦构成;  $\boldsymbol{\Lambda}$  为对角矩阵, 包含各颗卫星  $f_1$  频点上的载波波长。

式(3.8)中的流动站接收机的位置坐标改正数和浮点模糊度参数可以利用 2.7 节给出的最小二乘和卡尔曼滤波方法进行估计。当求解出模糊度参数的浮点解及其对应的方差协方差矩阵后, 可利用 LAMBDA 方法进行模糊度固定。

### 3.3.2 随机模型

由于 GNSS 观测量不可避免地含有偶然误差, 而偶然误差具有随机性, 因此 GNSS 观测量可看作是一个随机变量。随机变量的精度通常用中误差或者方差来描述, 而描述多个随机变量的精度及其相关性的指标则是协方差。对于 GNSS 定位而言, 随机模型就是确定 GNSS 观测值的方差-协方差矩阵, 其对参数估计有重要影响(Li et al., 2008)。GNSS 原始观测值的方差一般可以通过理论分析或者实际的信号测试获得, 然后通过误差传播定律来确定各类组合观测值的方差。

#### (1) 原始观测值的方差

GNSS 卫星采用的测距码是一种用来测定接收机和卫星之间距离的二进制码, 每一个二进制位称为一个码元, 而一个码元对应的距离称为码元宽度。一般接收机的测距精度可达到码元宽度的 1%, 如 GPS 系统的 C/A 码的码元长度为 293.05 m, 其对应的测距精度约为 2.93 m。相较于伪距测量精度, 载波相位的测量精度要高 2~3 个数量级, 可达到约 2 mm 的测量精度。因此, 要获取高精度定位, 必须采用高精度的载波相位测量值。

由于 GNSS 信号在大气传播过程中会受到电离层和对流层等环境因素的影响, 其观测值的精度会有所衰减, 因此接收机接收到的不同卫星的同类观测值的精度不能简单地视为等精度。一般来讲, 低高度角卫星受到的大气延迟和多路径误差会更大, 其对应的观测值精度也较差。如果对不同高度角的卫星观测值进行等权处理, 定位精度可能会降低。基于此, 不同学者分别提出了基于高度角(Eueller and Goad, 1991; Vermeer, 1997)和信噪比(Langley, 1997; 柳响林, 2003)的精度改化模型。由于基于高度角的改化模型的应用更加广泛, 本文也采用基于高度角的精度改化模型对原始 GNSS 观测值进行建模。

基于高度角的改化模型主要包括两种, 分别为基于高度角的指数函数和三角函数改

化模型，公式如下：

$$\sigma = a_0 + a_1 \exp(-ele/E_0) \quad (3.12)$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 / \sin^2(ele) \quad (3.13)$$

其中， $\sigma$ 为观测值的精度， $\sigma_0$ 为原始观测值的标称精度。 $a_0$ 和 $a_1$ 为根据经验确定的常数， $ele$ 和 $E_0$ 分别为卫星的高度角和高度角缩放因子，单位均为度。此外，基于高度角的三角函数改化模型式(3.13)式还可以作进一步改进，采用分段函数来实现(Witchayangkoon, 2000)，如下：

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sigma_0^2, & ele \geq \pi/6 \\ (\sigma_0/\sin(ele))^2, & else \end{cases} \quad (3.14)$$

上式表示当卫星的高度角低于 30 度时，急剧增大观测值的方差；当卫星的高度角高于 30 度时，直接使用原始观测值的标称精度。

## (2) 双差观测值的方差

GNSS RTK 定位中通常采用双差观测值，其方差可以根据精化后的原始观测值方差通过误差传播定律推导出来。假设基准站 $b$ 和流动站 $r$ 对 $n$ 颗卫星进行了同步观测，在历元 $t$ 获得了 $2n$ 个伪距或者载波相位观测值，下面以伪距观测值为例进行说明，如下：

$$\mathbf{P} = [P_b^1 \ P_r^1 \ P_b^2 \ P_r^2 \ \dots \ P_b^n \ P_r^n]^T \quad (3.15)$$

其中，下标 $b$ 和 $r$ 表示测站，上标 $1, 2, \dots, n$ 表示不同卫星。对每颗卫星的观测值在流动站和基准站间求差可得上式对应的站间单差算子为：

$$\Delta_{n \times 2n} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

假设上述原始观测值不相关，且测站 $b$ 和 $r$ 对某颗卫星 $s$ 的伪距测量精度分别为 $\sigma_b^s$ 和 $\sigma_r^s$ ，则上述原始伪距观测值的方差-协方差矩阵可表示为：

$$\mathbf{D}_P = \text{diag}((\sigma_b^1)^2 \ (\sigma_r^1)^2 \ (\sigma_b^2)^2 \ (\sigma_r^2)^2 \ \dots \ (\sigma_b^n)^2 \ (\sigma_r^n)^2) \quad (3.17)$$

利用误差传播定律可得如下站间单差的方差-协方差矩阵：

$$\mathbf{D}_{\Delta P} = \Delta(\mathbf{D}_P)\Delta^T \quad (3.18)$$

该矩阵为对角矩阵，说明站间单差观测是不相关的，其对角线上的元素为：

$$\sigma_s^2 = (\sigma_b^s)^2 + (\sigma_r^s)^2 \quad (3.19)$$

其中， $s$ 表示某颗单差卫星。对上述站间单差观测值继续求星间单差，以第一颗卫星作为参考卫星，则站星双差算子可表示为：

$$\nabla\Delta_{(n-1)\times n} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

再次利用误差传播定律可得如下站星双差的方差-协方差矩阵:

$$\mathbf{D}_{\nabla\Delta P} = (\nabla\Delta)(\mathbf{D}_{\Delta P})(\nabla\Delta)^T \quad (3.21)$$

显然, 站星双差观测值具有数学相关性。将上式写成用具体元素表示的形式为:

$$\mathbf{D}_{\nabla\Delta P} = \begin{bmatrix} \sum_{br}^{js} \sigma_s^2 & \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \cdots & \sum_{br}^j \sigma_s^2 \\ \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \sum_{br}^{js} \sigma_s^2 & \cdots & \sum_{br}^j \sigma_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \cdots & \sum_{br}^{js} \sigma_s^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

其中, 矩阵中的对角线元素为基准站**b**和流动站**r**对参考卫星**j**和非参考卫星**s**的观测值方差之和:

$$\sum_{br}^{js} \sigma_s^2 = (\sigma_b^j)^2 + (\sigma_r^j)^2 + (\sigma_b^s)^2 + (\sigma_r^s)^2 \quad (3.23)$$

矩阵中非对角线元素均相同, 且为基准站**b**和流动站**r**对参考卫星的观测值方差之和:

$$\sum_{br}^j \sigma_s^2 = (\sigma_b^j)^2 + (\sigma_r^j)^2 \quad (3.24)$$

式(3.22)给出了某个历元双差伪距观测值的方差-协方差矩阵, 载波相位观测值的方差-协方差矩阵与之有相同的形式, 可类比得到。

在多模 GNSS 融合数据处理时, 还需要考虑不同的 GNSS 系统之间的权比。一般而言, GPS 系统和 BDS 系统的测距信号的精度基本相当(杨元喜 et al., 2014), 观测值可以进行等权处理。而 GLONASS 伪距观测值由于存在 ICB 的影响, 精度较 GPS 要差, 数据融合时可适当降权。此外, 对于含有 GEO、MEO 和 IGSO 三种星座的 BDS 系统而言, 不同轨道类型的卫星观测值的精度存在差异, 相关研究表明 GEO 卫星的测距码精度比 MEO 和 IGSO 卫星的要低(杨元喜 et al., 2014), 因此可以对 GEO 卫星的观测值采取降权处理。在本文的数据处理中 GPS、BDS 和 GLONASS 系统的载波相位观测值的精度设置为 3 mm, 北斗 GEO 卫星和 GLONASS 卫星的伪距精度设置为 0.5 m, 其它卫星的伪距精度设置为 0.3 m。

### 3.4 RTK/INS 紧组合数学模型

RTK/INS 紧组合的数学模型包括 INS 误差状态模型和 RTK 观测模型。与伪距紧组合不同, RTK/INS 紧组合使用了高精度的载波相位观测值, 在使用高精度载波相位观测值之前需解算出未知的模糊度参数。RTK/INS 紧组合实现模糊度固定通常有两种方法,



第一种方法将模糊度参数增广到滤波误差状态中，称为附加模糊度参数的紧组合，该方法利用伪距和载波相位观测值进行滤波更新可直接实现 INS 辅助模糊度解算；第二种方法是利用 INS 先验位置信息以构建虚拟观测方程的形式辅助 RTK 模糊度解算，在模糊度固定后利用高精度的载波相位观测值进行滤波更新，这种方法称为独立解算模糊度参数的紧组合。下面对这两种方法进行讨论。

### 3.4.1 附加模糊度参数的 RTK/INS 紧组合

#### 3.4.1.1 状态方程

附加模糊度参数的 RTK/INS 紧组合模型将模糊度参数增广到系统误差状态向量中，因此其误差状态包括与 IMU 相关的误差状态和模糊度误差状态。由于模糊度参数不随时间变化（假设没有周跳发生），所以其对应的误差状态方程为：

$$\delta \dot{\mathbf{N}} = 0 \quad (3.25)$$

综合上式和 2.5.3 节介绍的 ECEF 坐标系下的惯导误差模型以及 IMU 传感器的误差模型，可得附有模糊度参数的 RTK/INS 紧组合误差状态方程（连续型）为：

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \delta \mathbf{v}_{eb}^e \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi}_{be}^e + \mathbf{R}_b^e \delta \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \delta \mathbf{g}^e \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e = -\mathbf{R}_b^e \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_g = -\frac{1}{\tau_{bg}} \delta \mathbf{b}_g + \mathbf{w}_g \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_a = -\frac{1}{\tau_{ba}} \delta \mathbf{b}_a + \mathbf{w}_a \\ \delta \dot{\mathbf{N}} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

其中， $\delta \mathbf{b}_g$  和  $\delta \mathbf{b}_a$  分别 IMU 的陀螺和加表零偏误差； $\mathbf{w}_g$  和  $\mathbf{w}_a$  分别为陀螺和加表的驱动白噪声； $\tau_{bg}$ 、 $\tau_{ba}$  分别为对应的一阶高斯-马尔科夫过程的相关时间。因此，附有模糊度参数的 RTK/INS 紧组合的误差状态向量为：

$$\delta \mathbf{x} = [(\delta \mathbf{r}_{eb}^e)^T \quad (\delta \mathbf{v}_{eb}^e)^T \quad (\boldsymbol{\phi}_{be}^e)^T \quad \delta \mathbf{b}_a^T \quad \delta \mathbf{b}_g^T \quad \delta \mathbf{N}^T]^T \quad (3.27)$$

其中， $\delta \mathbf{N}$  为多 GNSS 系统的双差模糊度误差向量。

#### 3.4.1.2 观测方程

RTK/INS 紧组合的观测向量由基准站和流动站 GNSS 接收机输出的伪距、载波相位观测值形成站星双差后与 INS 推算的几何双差距离求差获得：

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \nabla \Delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{INS} - \nabla \Delta \mathbf{P}_{GNSS} \\ \nabla \Delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{INS} - \lambda \nabla \Delta \boldsymbol{\phi}_{GNSS} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

其中， $\nabla \Delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{INS}$  表示利用 INS 递推的位置计算的站星几何双差距离； $\nabla \Delta \mathbf{P}_{GNSS}$  和  $\nabla \Delta \boldsymbol{\phi}_{GNSS}$

分别表示利用基准站和流动站接收机输出的伪距和载波相位计算的站星双差观测量，二者均包含 GPS、BDS 和 GLONASS 三系统的观测量。此时，紧组合滤波更新的量测方程可表示为：

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k \quad (3.29)$$

式中  $\mathbf{H}_k$  为描述滤波更新的观测量与系统误差状态之间投影关系的矩阵，即紧组合设计矩阵； $\boldsymbol{\eta}_k$  为量测噪声向量。

与使用 GNSS 位置观测量的松组合观测模型不同，RTK/INS 紧组合中使用的是在 GNSS 天线相位中心测量的原始 GNSS 观测值，而紧组合系统误差状态中的位置误差为 IMU 的位置误差。因此，首先需要建立 GNSS 天线相位中心处的位置误差与 IMU 位置误差的关系，然后再利用 GNSS 双差观测值与 GNSS 天线相位中心位置之间的投影关系构建紧组合设计矩阵。GNSS 天线相位中心处的位置误差与 IMU 位置误差的关系在 2.8.2 节已经进行了推导，如下：

$$\delta \mathbf{r}_{GNSS}^e \approx \delta \mathbf{r}_{IMU}^e + [\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b \times] \boldsymbol{\phi}_{be}^e \quad (3.30)$$

其中， $\delta \mathbf{r}_{GNSS}^e$  和  $\delta \mathbf{r}_{IMU}^e$  分别为 GNSS 天线相位中心和 IMU 测量中心在 ECEF 系下的位置误差矢量； $\mathbf{R}_b^e$  为 IMU 在 ECEF 系下的姿态矩阵； $\boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b$  为 IMU 测量中心到 GNSS 天线相位中心的杆臂在  $b$  系下的投影； $\boldsymbol{\phi}_{be}^e$  为系统误差状态向量中的姿态误差矢量。

GNSS 双差观测值与 GNSS 天线相位中心位置之间的投影关系为 RTK 观测方程式 (3.8) 中的设计矩阵  $\mathbf{H}$ ，因此紧组合伪距观测方程的设计矩阵为：

$$\mathbf{H}_{k,p} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{0}_{n \times 3} \quad \mathbf{H} \cdot [\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b \times] \quad \mathbf{0}_{n \times 6} \quad \mathbf{0}_{n \times n}] \quad (3.31)$$

对应的载波相位观测方程的设计矩阵为：

$$\mathbf{H}_{k,\varphi} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{0}_{n \times 3} \quad \mathbf{H} \cdot [\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b \times] \quad \mathbf{0}_{n \times 6} \quad \boldsymbol{\Lambda}_{n \times n}] \quad (3.32)$$

式中  $\mathbf{H}$  和  $\boldsymbol{\Lambda}$  的含义与 3.3.1 节中式 (3.9) 和 (3.10) 的含义一致。对于以上两式可以发现，载波相位观测方程的设计矩阵中含有与模糊度参数有关的子块矩阵，而伪距观测方程设计矩阵中对应的子块矩阵为零矩阵。

需要说明的是，当载波相位模糊度没有固定时，紧组合分别使用伪距和载波相位观测值进行滤波更新，对获取的模糊度浮点解尝试进行模糊度固定；当模糊度固定后，需要消去系统状态向量中的模糊度参数，这时可以直接使用高精度的载波相位观测值进行滤波更新，此时载波相位观测方程的设计矩阵为：

$$\mathbf{H}_{k,\varphi} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{0}_{n \times 3} \quad \mathbf{H} \cdot [\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b \times] \quad \mathbf{0}_{n \times 6}] \quad (3.33)$$

根据上述量测方程即可利用 2.7.2 节给出的卡尔曼滤波更新方程式 (2.93)、(2.94)、(2.95) 进行紧组合滤波更新。

### 3.4.1.3 INS 辅助模糊度固定

附加模糊度参数的 RTK/INS 紧组合将模糊度参数增广到状态向量中，能直接利用 INS 先验状态信息提高模糊度浮点解的精度，下面用公式进行证明。考虑 GNSS 信号中断后首个观测历元 INS 对模糊度浮点解辅助的情形，此时卡尔曼滤波预测的方差协方差矩阵可写为如下分块矩阵形式：

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\delta r}^- & \mathbf{P}_{\delta r, l-r}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{l-r, \delta r}^- & \mathbf{P}_{l-r}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\delta N}^- \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

其中，上标“-”表示预测值； $\mathbf{P}_{\delta r}^-$ 为 IMU 位置误差对应的协方差矩阵； $\mathbf{P}_{l-r}^-$ 为 IMU 误差状态中除去位置误差之外的速度、姿态和 IMU 传感器误差对应的方差协方差矩阵； $\mathbf{P}_{\delta N}^-$ 为模糊度参数的初始方差阵。由于信号中断后模糊度参数需要重新初始化，所以模糊度参数和 IMU 的误差状态量之间没有相关性。

不失一般性，设 IMU 测量中心到 GNSS 天线相位中心的杆臂项  $\boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b$  为零，则载波相位观测方程的设计矩阵  $\mathbf{H}_k$  中只含有与 IMU 位置误差有关的子矩阵  $\mathbf{H}$ 。为了方便分析滤波更新后模糊度参数的协方差矩阵性质，应用如下的卡尔曼滤波协方差更新方程(Gelb, 1974)：

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} - \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \quad (3.35)$$

将式(3.34)代入卡尔曼滤波方差更新方程式(3.35)可得到更新后模糊度参数的协方差矩阵为：

$$\mathbf{P}_{\delta N}^+ = \mathbf{P}_{\delta N}^- - \lambda^2 \mathbf{P}_{\delta N}^- (\mathbf{H} \mathbf{P}_{\delta r}^- \mathbf{H}^T + \lambda^2 \mathbf{P}_{\delta N}^- + \mathbf{R}_\varphi)^{-1} \mathbf{P}_{\delta N}^- \quad (3.36)$$

式中， $\mathbf{R}_\varphi$ 为载波相位观测值的测量方差矩阵。从上式中可以看出，滤波更新后的模糊度协方差仅受卫星几何构型  $\mathbf{H}$  和先验位置方差  $\mathbf{P}_{\delta r}^-$  的影响。显然，如果 INS 先验位置约束越强， $\mathbf{P}_{\delta r}^-$  的值将会越小，从而更新后的模糊度协方差  $\mathbf{P}_{\delta N}^+$  也会越小。因此，精确的 INS 位置约束将会提高模糊度协方差矩阵的精度。

附加模糊度参数的 RTK/INS 紧组合将模糊度参数增广到系统误差状态向量中，增加了卡尔曼滤波器的维数，特别是在多模 RTK/INS 紧组合中需要解算的模糊度参数显著增加。在 GNSS 观测较为恶劣的城市环境下，由于 GNSS 信号被频繁地遮挡而中断，这时模糊度参数需要被频繁地增广到滤波器中进行求解，这无疑增加了滤波器的运算量。因此，对于运算量要求很高的实时应用而言，附加模糊度参数的 RTK/INS 紧组合不宜在 GNSS 观测恶劣的环境下使用(孙红星, 2004)。

### 3.4.2 独立解算模糊度的 RTK/INS 紧组合

#### 3.4.2.1 状态方程

独立解算模糊度参数的 RTK/INS 紧组合的状态方程同 GNSS/INS 松组合模型的状态方程，即只包含 2.5.3 节介绍的 ECEF 坐标系下的惯导误差模型以及 IMU 传感器的误差模型，如下：

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \delta \mathbf{v}_{eb}^e \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi}_{be}^e + \mathbf{R}_b^e \delta \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \delta \mathbf{g}^e \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e = -\mathbf{R}_b^e \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_g = -\frac{1}{\tau_{bg}} \delta \mathbf{b}_g + \mathbf{w}_g \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_a = -\frac{1}{\tau_{ba}} \delta \mathbf{b}_a + \mathbf{w}_a \end{cases} \quad (3.37)$$

### 3.4.2.2 观测方程

由于独立解算模糊度参数的 RTK/INS 紧组合中，系统误差状态向量不含有模糊度参数，因此滤波更新的观测方程为载波相位观测方程：

$$\mathbf{Z}_k = \nabla \Delta \hat{\boldsymbol{\rho}}_{INS} - \lambda \nabla \Delta \boldsymbol{\varphi}_{GNSS} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{H}_{k,\varphi} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{0}_{n \times 3} \quad \mathbf{H} \cdot [\mathbf{R}_b^e \boldsymbol{\rho}_{GNSS}^b \times] \quad \mathbf{0}_{n \times 6}] \quad (3.39)$$

当模糊度没有固定时，可使用浮点模糊度对应的载波相位观测值进行更新。在 GNSS 较为恶劣的观测环境下，GNSS 信号将被频繁遮挡而中断，对应的浮点模糊度也会频繁进行初始化，这时浮点解精度取决于伪距观测值。此外，由于惯导具有很高的短期精度，少数历元间断出现的浮点解对位置解算精度的影响较小。因此，为了使得算法更加简单，模糊度没有固定时可以使用伪距观测值进行更新。

### 3.4.2.3 INS 辅助模糊度固定

独立解算模糊度的 RTK/INS 紧组合将 INS 预测的三维位置作为虚拟观测值，再联合 GNSS 观测的伪距和载波相位观测值进行模糊度解算。假设双差伪距和载波相位观测方程在 INS 递推的位置处进行线性化，则综合 INS 虚拟观测方程和 GNSS 伪距、载波相位观测方程的模糊度解算模型为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\varphi \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{INS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{H} & \boldsymbol{\Lambda} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_r \\ \nabla \Delta \mathbf{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla \Delta \mathbf{P} - \nabla \Delta \mathbf{r}_0 \\ \lambda \nabla \Delta \boldsymbol{\varphi} - \nabla \Delta \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

式中  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵，其余各参数的含义与 3.3.1 节的式(3.8)、(3.9)、(3.10)和(3.11)一致。假设伪距、载波相位和 INS 虚拟观测方程的权矩阵分别为  $\mathbf{W}_p$ 、 $\mathbf{W}_\varphi$  和  $\mathbf{W}_{INS}$ ，则上述方程对应的最小二乘解的法方程系数矩阵可表示为：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{HH} &= \mathbf{N}_{BB}^T \mathbf{W}_{P,\varphi,INS} \mathbf{H}_{BB} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{H} & \lambda \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{bmatrix}^T \mathit{diag}(\mathbf{W}_P \quad \mathbf{W}_\varphi \quad \mathbf{W}_{INS}) \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{H} & \lambda \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{W}_P \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{W}_\varphi \mathbf{H} + \mathbf{W}_{INS} & \lambda \mathbf{H}^T \mathbf{W}_\varphi \\ \lambda \mathbf{W}_\varphi \mathbf{H} & \lambda^2 \mathbf{W}_\varphi \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

相较于只使用伪距和载波相位观测值进行模糊度解算的法方程系数矩阵，上述法方程系数阵的左上角子矩阵中包含了与 INS 位置约束精度有关的项  $\mathbf{W}_{INS}$ ，该约束项将会显著改善法方程的病态性质，从而提高模糊度浮点解的估计精度，特别是在 INS 位置约束的精度较高时。对于单频 RTK 而言，由于  $L_1$  载波频率的波长较短且伪距的测量精度较低，因此单频 RTK 的模糊度固定成功率和可靠性均较低，特别是在 GNSS 受限的环境中。加入 INS 的约束信息可以有效提高模糊度浮点解的精度，压缩模糊度搜索空间，从而提高模糊度固定成功率和可靠性等 (Skaloud, 1998; Scherzinger, 2002; Petovello, 2003; 孙红星, 2004; Han et al., 2015; Li et al., 2017; Li et al., 2018)。

### 3.5 RTK/INS 紧组合抗差模型

为了保持紧组合系统状态的估计最优性，滤波更新前必须将含有粗差的观测剔除。在城市复杂环境中，伪距观测值往往含有较大的粗差，这些粗差将会严重影响浮点模糊度的估计，进而降低模糊度固定的成功率和可靠性。为了减弱这些粗差观测值对参数估计的影响，一个可行的方法是将观测值的方差放大，从而降低其在参数估计中的权重。

在正常条件下，卡尔曼滤波新息序列服从零均值分布，如果新息序列中出现较大偏差项则表明对应项的测量值含有粗差。本文基于滤波新息序列构造 IGG-III 抗差模型对观测值进行建模，其形式如下 (Yang et al., 2002):

$$\gamma_{ii} = \begin{cases} 1, & |\tilde{v}_{k,i}| \leq k_0 \\ \frac{\tilde{v}_{k,i}}{k_0} \times \left( \frac{k_1 - k_0}{k_1 - \tilde{v}_{k,i}} \right), & k_0 < |\tilde{v}_{k,i}| \leq k_1 \\ \infty, & |\tilde{v}_{k,i}| > k_1 \end{cases} \tag{3.42}$$

其中， $k_0$  和  $k_1$  为常值，通常分别取为 2.0-3.0 和 4.5-8.5； $\tilde{v}_{k,i}$  为历元  $k$  时刻第  $i$  个测量值的归一化新息，可表示为：

$$\tilde{v}_{k,i} = \frac{V_{k,i}}{\sqrt{(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)_{i,i}}} \tag{3.43}$$

其中， $V_{k,i}$  为历元  $k$  时刻第  $i$  个测量值的新息； $\mathbf{P}_{k,k-1}$  为卡尔曼滤波协方差的时间更新； $\mathbf{R}_k$  为测量值的协方差矩阵。式(3.42)也称为方差膨胀模型，当测量值不含有粗差时  $\gamma_{ii}$  等于 1，测量值的原始方差保持不变；当测量值含有粗差时  $\gamma_{ii}$  为无穷大，也就是剔除该观测

值；当归一化新息介于 $k_0$ 和 $k_1$ 两者之间时，该测量值在参数估计过程中方差被放大，从而减小其对参数估计的影响。

由于 GNSS 双差观测值在数学上具有相关性，因此测量值对应的协方差矩阵进行方差膨胀后应该保持原有的相关性，在滤波更新时可使用如下的等价协方差矩阵：

$$\bar{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} \gamma_{11}\sigma_1^2 & \cdots & \gamma_{1n}\sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1}\sigma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn}\sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\gamma_{ij} = \sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{jj}} \quad (3.45)$$

其中， $\gamma_{ij}$ 为测量协方差矩阵中第 $i$ 行第 $j$ 列元素对应的协方差膨胀因子。

在模糊度解算过程中，应用上述抗差方案对伪距观测值进行建模可有效降低伪距粗差观测值对模糊度浮点解估计的影响；在滤波更新时，上述抗差模型将用于对伪距观测值或者载波相位观测值进行建模，防止测量值粗差影响状态的估计。上述抗差方案在模糊度未固定的情况下将被执行两次，第一次是浮点模糊度估计时对伪距观测值进行抗差处理，第二次是滤波更新的过程中对伪距或者载波相位观测值（模糊度可能是错误固定）进行抗差处理，称为 RTK/INS 紧组合算法的两步抗差模型。

### 3.6 RTK/INS 紧组合算法框架

基于以上小节阐述的算法模型，本文开发了多模 RTK/INS 紧组合数据处理软件模块，其框图如图 3.1 所示，主要包括六个部分：(1) IMU 误差补偿；(2) 惯性导航算法（INS 机械编排算法）；(3) GNSS 数据处理；(4) 惯导辅助模糊度解算；(5) RTK/INS 紧组合 Kalman 滤波状态估计；(6) 误差反馈与导航结果输出。下面对其主要流程进行介绍。

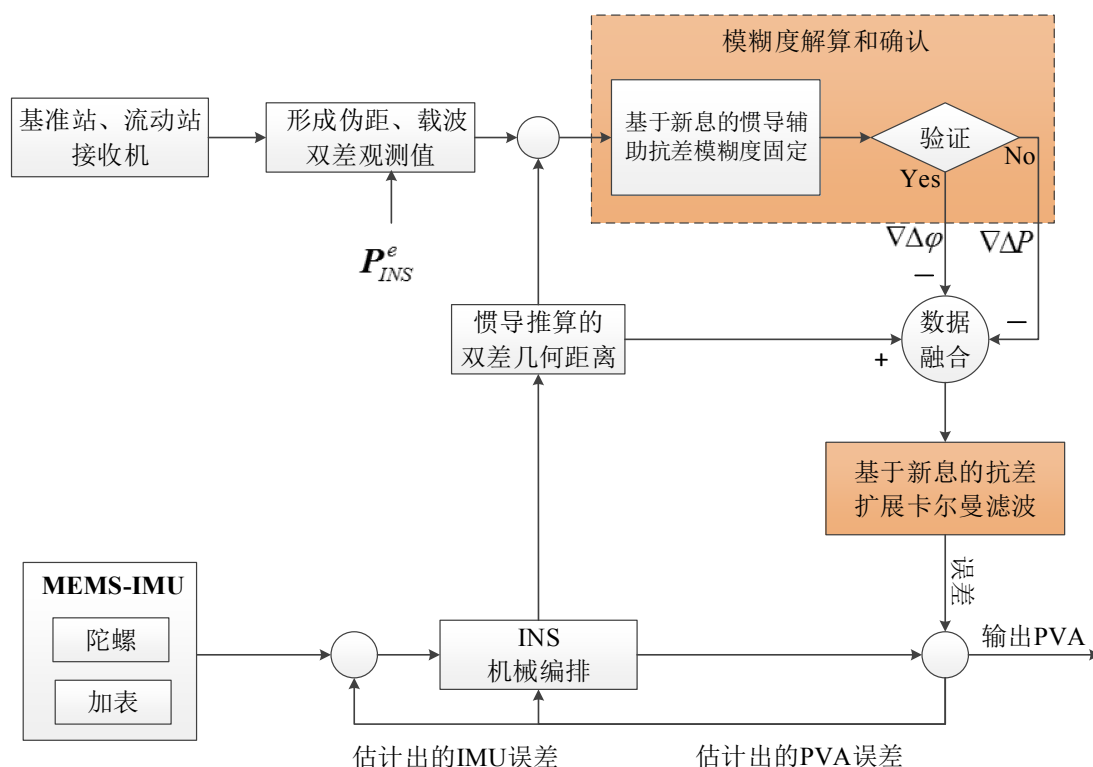


图 3.1 单频多模 GNSS RTK/INS 抗差紧组合算法框图

### (1) IMU 误差补偿

IMU 输出的原始陀螺和加速度计数据（增量或速率）在进行 INS 机械编排算法之前需要进行误差补偿，即利用紧组合卡尔曼滤波器在线估计出来的零偏误差等对原始数据进行改正。

### (2) INS 机械编排

在 INS 机械编排之前需要完成 INS 的初始化即初始对准，在 RTK/INS 紧组合中惯导的初始位置和速度信息可以由 RTK 解算的位置和速度提供，而姿态的确定则需要根据惯导的运动状态及其自身的信息来确定，一般可分为动对准、静对准两种方式，详细内容可参考(Titterton and Weston, 2004; Groves, 2013)。系统完成初始化后即可按照 2.5.2 节介绍的 INS 机械编排算法，完成姿态、速度和位置更新。

### (3) GNSS 数据处理

当获得基准站和流动站的同步 GNSS 观测值后，分别形成伪距和载波相位双差观测值，其中载波相位的初始模糊度使用 INS 推算的位置与卫星位置计算的几何距离求出。

### (4) 惯导辅助模糊度解算

形成伪距和载波相位双差观测方程后，联立惯导提供的位置虚拟观测方程求解模糊度浮点解及其方差协方差矩阵，然后使用 LAMBDA 方法(Teunissen, 1995)固定模糊度。在求解模糊度浮点解的过程中，使用 3.5 节介绍的基于滤波新息的紧组合抗差算法对伪

距观测值建模，从而减小伪距粗差对浮点模糊度估计的影响。

#### (5) 紧组合滤波状态估计

紧组合卡尔曼滤波器将融合 INS 推算的双差几何距离与 GNSS 双差伪距或载波相位观测量，然后对系统的导航状态误差和 IMU 传感器误差进行最优估计。在模糊度解算过程中，如果模糊度确认失败，则可以使用伪距或者模糊度浮点解进行滤波更新。在城市等复杂环境下，由于多数卫星信号被频繁的遮挡而中断，这时浮点解和伪距滤波更新的精度相当，因此可直接使用伪距观测值进行滤波更新。此外，在滤波更新阶段也需要使用 3.5 节介绍的基于滤波新息的紧组合抗差算法对观测值进行建模。

#### (6) 误差反馈与导航输出

利用紧组合滤波器估计出来的导航状态误差对 INS 机械编排的导航结果进行反馈修正，同时，将估计的陀螺和加速度计的零偏、比例因子等误差反馈到 IMU 原始观测值进行误差补偿。最后，输出经过误差校正后的位置、速度和姿态等导航参数。

### 3.7 RTK/INS 紧组合算法验证与性能评估

GNSS/INS 组合导航系统除了能提供连续的位置、速度和姿态参数外，另外一个主要优势就体现在复杂环境下提供连续高精度定位的结果。本节将通过开阔天空和城市复杂环境下的两组车载数据对提出的单频多模 RTK/INS 紧组合算法进行验证和分析，重点讨论多系统 GNSS 和 INS 对 RTK 模糊度固定和定位性能的影响。

#### 3.7.1 开阔天空环境

##### 3.7.1.1 车载测试描述

该组数据是 2015 年 5 月 12 日在武汉市开阔郊区（大花岭）采集的车载数据。车载测试时间约为 1 小时，测试轨迹如图 3.2 所示，对应的载体速度和姿态如图 3.3 所示。可以看出，车载测试中有比较频繁的加减速、转弯和调头等机动，只有几段由于等待红绿灯而导致的短时间静止。



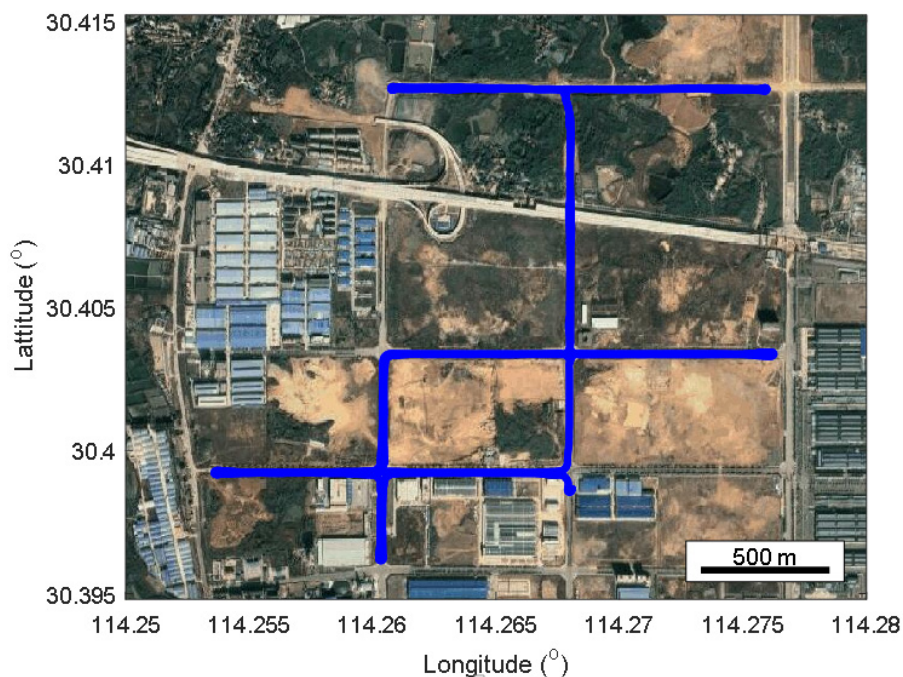


图 3.2 车载测试轨迹

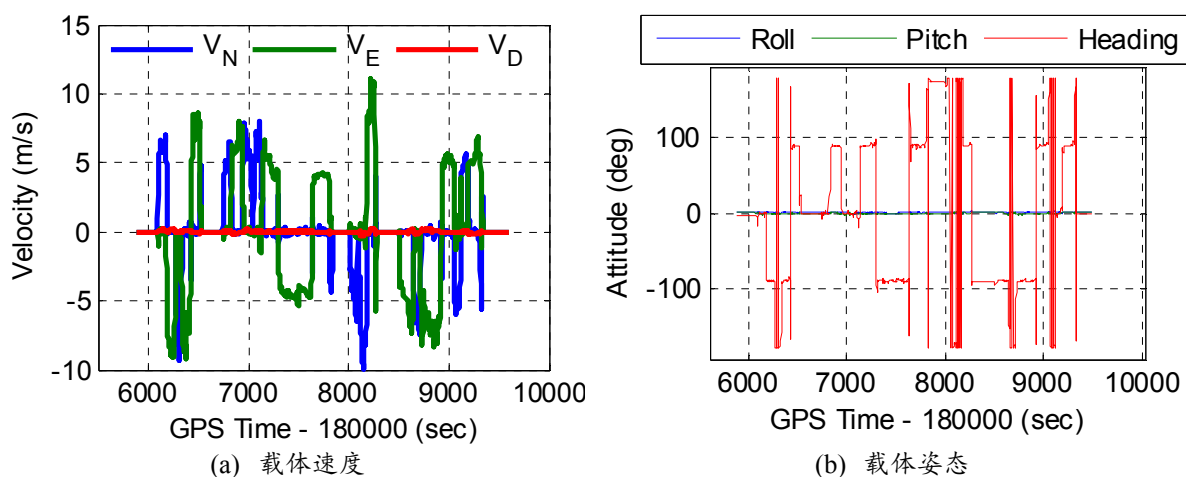


图 3.3 载体速度和姿态

车载测试中搭载了几种不同精度的组合导航硬件系统，本文对 NovAtel 公司的 SPAN-CPT 采集的 IMU 数据进行处理，该款 IMU 由三轴光纤陀螺和三轴 MEMS 加速度计组成，数据采样率为 100 Hz，其性能参数如表 3.1 所示。基准站采用 Trimble NetR9 多频多模 GNSS 接收机，流动站采用 Trimble 多频多模 GNSS OEM 板卡，数据采样率均设为 1 Hz，其中 GPS、BDS 和 GLONASS 的单频数据用于本文的算法验证与性能评估。由于流动站和基准站之间的距离小于 2 km，因此数据处理中双差残余的电离层和对流层误差均可以忽略。

表 3.1 IMU 传感器的性能参数

零偏常值		零偏重复性		比例因子		随机游走	
陀螺 ( $^{\circ}/h$ )	加表 (mGal)	陀螺 ( $^{\circ}/h$ )	加表 (mGal)	陀螺 (ppm)	加表 (ppm)	角度 ( $^{\circ}/\sqrt{h}$ )	速度 ( $m/s/\sqrt{h}$ )
20	50000	3	750	1500	4000	0.0667	0.10

### 3.7.1.2 卫星可见性分析

可用卫星数及其对应的 PDOP 值对模糊度固定和定位精度均有重要影响。图 3.4 给出了  $15^{\circ}$  截止高度角下 GPS (G)、GPS/BDS (G+C) 和 GPS/BDS/GLONASS (G+C+R) 的可见卫星数与其对应的 PDOP 值。从中可以看出，相较于单 GPS 系统，加入 BDS 和 GLONASS 后可用卫星数显著增加，PDOP 则显著减小，其中 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的 PDOP 值优于 1.5；统计结果表明，GPS、GPS/BDS 和 GPS/BDS/GLONASS 的平均卫星数分别为 7.7、19.2 和 26.3，而其对应的平均 PDOP 值分别为 2.14、1.42 和 1.17。相较于单 GPS，GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的平均 PDOP 值分别提高了 33.6% 和 45.3%。

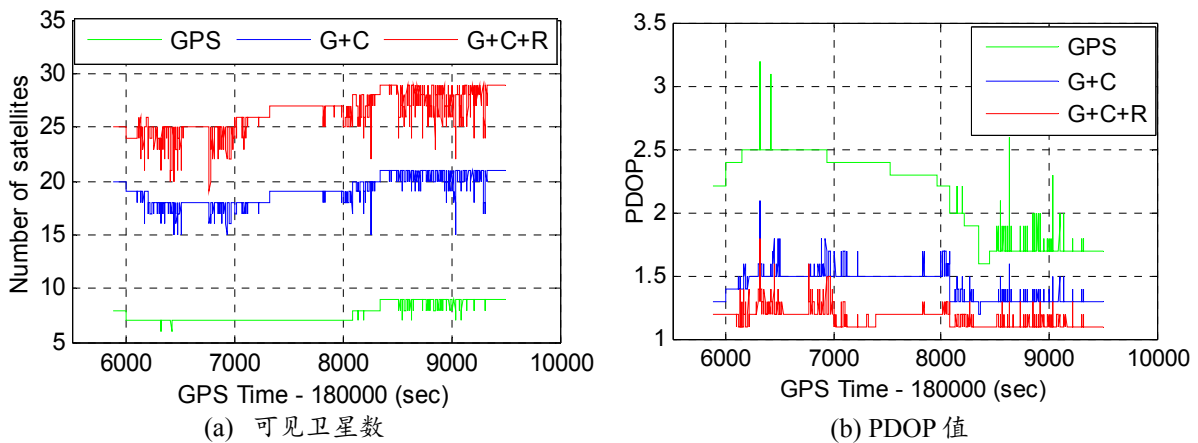


图 3.4  $15^{\circ}$  截止高度角下 GPS (G)、GPS/BDS (G+C) 和 GPS/BDS/GLONASS (G+C+R) 的可见卫星数与其对应的 PDOP 值

由于多模 GNSS 可以提供更多的可用卫星数，这为其在 GNSS 受限环境如城市峡谷中进行高精度定位提供了可能。图 3.5 给出了 GPS/BDS/GLONASS 组合系统在  $15^{\circ}$  到  $40^{\circ}$  截止高度角下的可见卫星数与 PDOP 值。从图中可以看出，随着截止高度角的提高可用卫星数逐渐减少，而对应的 PDOP 值则逐渐增大。在截止高度角为  $40^{\circ}$  时，GPS+BDS+GLONASS 组合系统的可用卫星数仍然多于单 GPS 系统在  $15^{\circ}$  截止高度角下的可用卫星数（图 3.5），但是其对应的 PDOP 值则比单 GPS 的大 2 倍。这主要是由于高度角较高的卫星的几何分布导致其 VDOP 值显著增大。

表 3.2 给出了 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在截止高度角从 15°到 40°变化时(间隔为 5°) 的平均 DOP 值。可以看出, 在截止高度角为 40°时, HDOP 仍然只有 1.1521, 而其 VDOP 为 4.2781。因此, 多模 GNSS 在较高的截止高度角时高程的定位精度会有所下降。

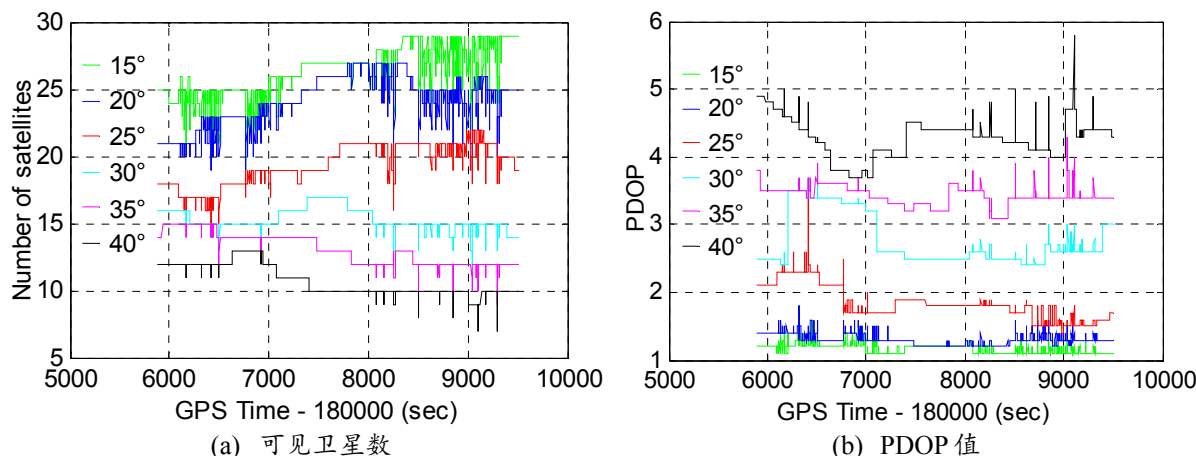


图 3.5 GPS/BDS/GLONASS 组合系统在 15°到 40°截止高度角下的可见卫星数与 PDOP 值

表 3.2 GPS/BDS/GLONASS 组合系统在 15°到 40°截止高度角下的平均 DOP 值

Cut-Off (°)	15	20	25	30	35	40
PDOP	1.1670	1.3043	1.8347	2.7552	3.4205	4.2781
HDOP	0.5187	0.5579	0.7044	0.9165	1.0135	1.1521
VDOP	1.0433	1.1866	1.6842	2.6033	3.2651	4.1215

### 3.7.1.3 单历元模糊度固定性能分析

正确的模糊度固定是实现差分载波相位厘米级定位的先决条件, 其中常用单历元模糊度固定率来评估模糊度固定性能。下面将对单频 GPS、GPS+BDS、GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK 和 RTK/INS 紧组合的单历元模糊度固定性能进行对比分析, 包括 ratio 序列和模糊度固定率。

图 3.6 给出了截止高度角为 15°时不同组合系统的单历元模糊度固定 Ratio 值序列。从中可以看出, 单 GPS 系统的 Ratio 值大部分小于设定的阈值 3, 这表明单 GPS 的模糊度固定可靠性和固定率都很低。相比较而言, GPS+BDS 或者 GPS+BDS+GLOASS 组合系统的 Ratio 值则显著增大, 这主要是由于多模 GNSS 显著增加了模型的几何强度。从图中还可以看出, 加入 INS 辅助后, GPS/INS 紧组合的 Ratio 值相较于单 GPS 系统显著增大, 而对于 GPS/BDS/INS 和 GPS/BDS/GLONASS/INS 而言只有少数历元 Ratio 值明显增大。这主要是因为 GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 自身解算的模糊度精度已经较高, INS 辅助作用不再显著。

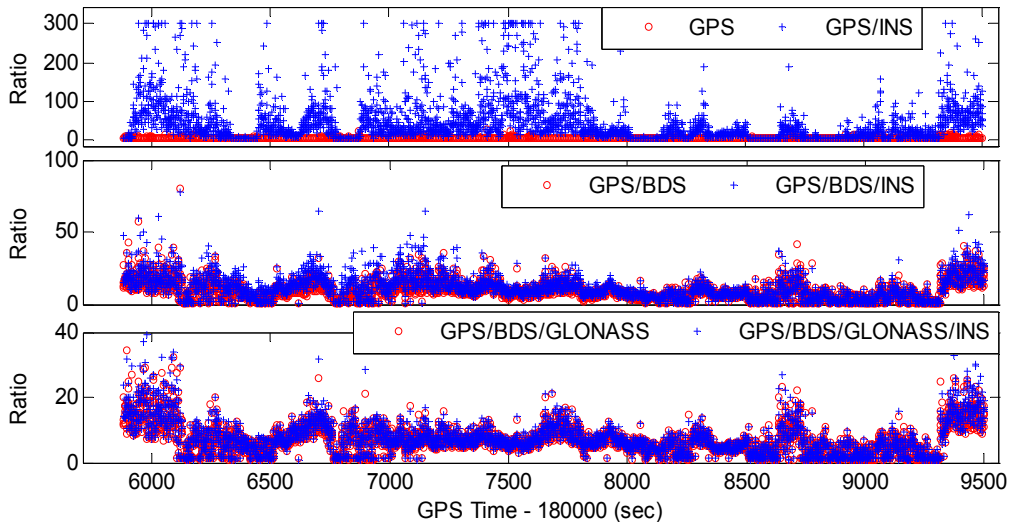


图 3.6 截止高度角为 15°时不同组合系统的单历元模糊度固定 Ratio 值序列

模糊度固定率直接反映了高精度厘米级定位的可用性，本文的模糊度固定率为正确固定的历元数与总历元数的比例，如下：

$$P_{SE} = \frac{\text{正确固定的历元数}}{\text{总历元数}} \quad (3.46)$$

表 3.3 卫星截止高度角为 15°, 20°, 25°, 30°, 35°和 40°时不同系统单频单历元模糊度固定率

系统组合	不同截止高度角(°)下的模糊度固定率 $P_{SE}$ (%)						
	15	20	25	30	35	40	
RTK	GPS	8.4	4.3	0.4	—	—	—
	GC	86.4	89.5	92.7	92.6	77.7	27.2
	GCR	84.3	88.5	93.2	95.9	90.9	50.3
RTK/INS	GPS	77.7	67.6	6.8	—	—	—
	GC	87.1	90.3	94.1	97.8	99.3	99.7
	GCR	84.5	88.6	94.0	97.7	99.1	99.5

表 3.3 给出了卫星截止高度角为 15°, 20°, 25°, 30°, 35°和 40°时不同组合系统单频单历元模糊度固定率。从中可以看出，截止高度角为 15°时单 GPS 的模糊度固定率仅为 8.4%，而多模 GNSS 则极大地提高了模糊度固定率，而且在截止高度角为 35°时，GPS+BDS+GLONASS RTK 的模糊度固定率仍然超过 90%。显然，多模 GNSS 在截止高度角较高时在模糊度固定方面具有显著的优势。相较于 GNSS RTK，RTK/INS 紧组合可以进一步提高模糊度固定率，特别是在截止高度角大于 30°时；在截止高度角低于 30°时，多系统 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定率相较于多系统 GNSS RTK 改善的改善较小，其原因是多系统 GNSS 的模型强度较高且一些低高度角的卫星观测值影响了模糊度固定。当截止高度角为 35°和 40°时，GPS/BDS/INS 和 GPS/BDS/GLONASS/INS 紧组合几乎可以实现单历元模糊度固定。从这个方面也说明了 INS 可以弥补 GNSS 定位的

不足，即在类似于遮挡的高截止高度角环境下 INS 能有效提高 GNSS 精密定位的能力。

### 3.7.1.4 定位性能分析

为了分析 RTK 及其 RTK/INS 紧组合的定位性能，对车载测试数据分别使用 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS RTK 及其对应的 RTK/INS 紧组合等 6 种模式进行处理。在模糊度固定策略中，采用“Fixed and Hold”模式(Takasu and Yasuda, 2010)进行处理使得所有历元的模糊度正确固定，从而进行定位精度的评估。同时，将双频 GPS/BDS/GLONASS/INS 紧组合反向平滑解算的结果作为参考结果。

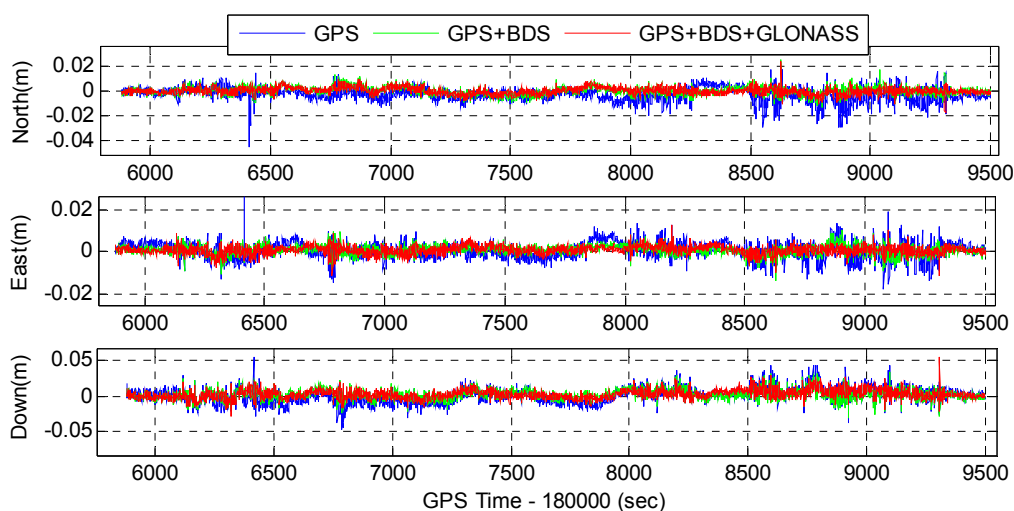


图 3.7 截止高度角为  $15^\circ$  时不同组合系统 RTK 定位结果与参考值的位置差异

图 3.7 和图 3.8 分别给出了截止高度角为  $15^\circ$  时不同组合系统 RTK 和 RTK/INS 紧组合定位结果与参考值的位置差异时间序列。可以看出，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 固定解的定位精度基本相当，但是 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的位置差异具有更好的稳定性。

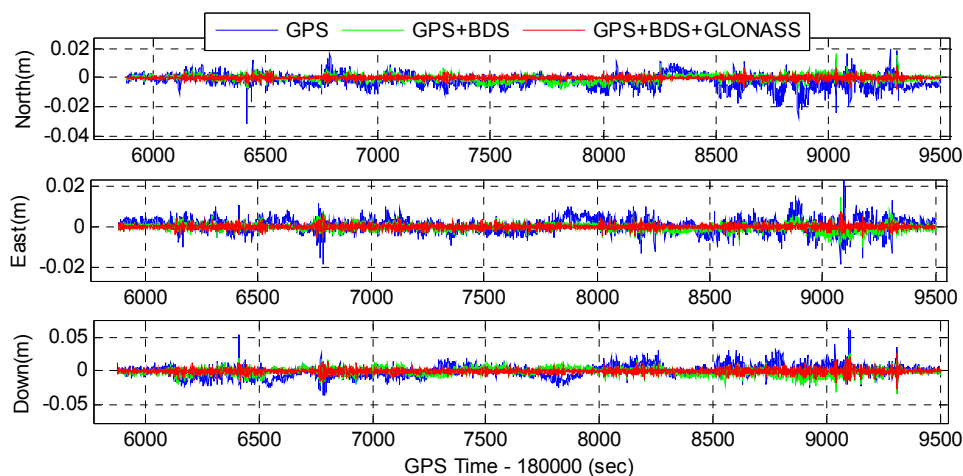


图 3.8 截止高度角为  $15^\circ$  时不同组合系统 RTK/INS 紧组合定位结果与参考值的位置差异

表 3.4 给出卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、GPS+BDS、GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK 及其 RTK/INS 紧组合的定位结果与参考值的位置差异 RMS。统计结果表明，相较于 GPS RTK，GPS+BDS RTK 在北、东、地三个方向的位置差异 RMS 分别改善了 43.1%、40.0%和 26.3%，而 GPS+BDS+GLONASS RTK 在北、东、地三个方向的位置差异 RMS 分别改善了 51.7%、45.0%和 31.3%。显然，加入 INS 辅助后定位性能得到进一步改善，对于 GPS 而言，在北、东、地三个方向上的改善分别为 16.0%、15.0%和 10.1%，GPS+BDS 对应的改善分别为 33.3%、29.2%和 26.0%。其中，GPS/BDS/GLONASS/INS 紧组合可获得最优的定位性能，其在北、东、地三个方向上的位置差异 RMS 分别为 1.2 mm、1.2 mm 和 3.6 mm。此外，多模 GNSS RTK/INS 紧组合相较于 GPS RTK/INS 紧组合也体现出了明显优势。其中，GPS+BDS RTK/INS 紧组合在北、东、地三个方向上的位置差异 RMS 分别改善了 56.0%、50.0%和 39.3%，而 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 对应的改善分别为 76.0%、64.7%和 59.6%。

表 3.4 卫星截止高度角为  $15^\circ$  时不同系统组合位置差异 RMS 值

System Configurations	GPS		GPS/BDS		GPS/BDS/GLONASS		
	RTK	RTK/INS	RTK	RTK/INS	RTK	RTK/INS	
RMS (mm)	North	5.8	5.0	3.3	2.2	2.8	1.2
	East	4.0	3.4	2.4	1.7	2.2	1.2
	Down	9.9	8.9	7.3	5.4	6.8	3.6

为了验证多系统 GNSS 在较高的截止高度角下的定位优势，本文在  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$  和  $40^\circ$  等不同截止高度角下分别使用 GPS/BDS/GLONASS RTK 及其对应的 RTK/INS 紧组合算法对数据进行了处理，图 3.9 和图 3.10 则分别给出了相应的定位结果与参考值的位置差异序列。从中可以看出，在模糊度固定正确的情况下，多模 GNSS RTK 和 RTK/INS 在  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$  和  $40^\circ$  的卫星截止高度角下能获得相当的定位精度，水平位置差异基本在 2 cm 以内而高程基本在 5 cm 以内，这充分体现出了多系统 GNSS 的巨大优势。

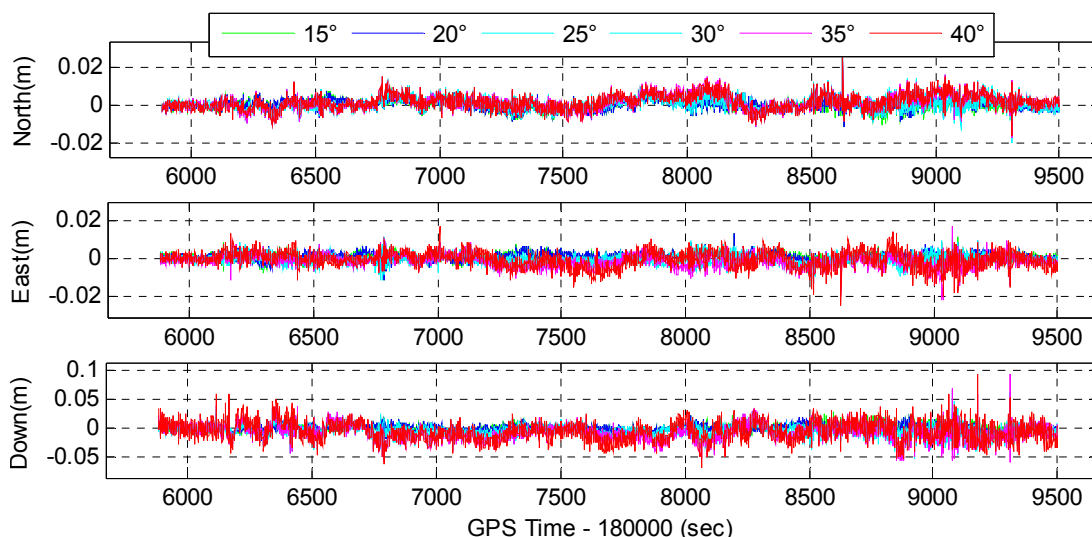


图 3.9 卫星截止高度角为 15, 20, 25, 30, 35 和 40°时 GPS/BDS/GLONASS RTK 定位结果与参考值差异

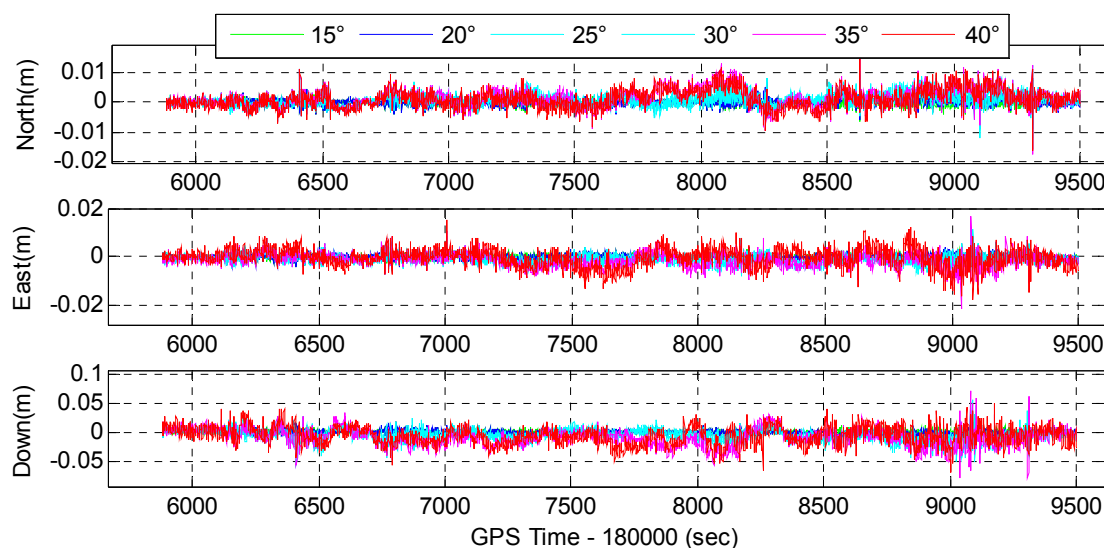


图 3.10 卫星截止高度角为 15, 20, 25, 30, 35 和 40°时 GPS/BDS/GLONASS/INS 定位结果与参考值差异序列

### 3.7.1.5 信号中断后紧组合位置误差与模糊度恢复

如前所述，单频多模 GNSS RTK 在开阔天空环境下可以获得高精度的厘米级定位。但是，在 GNSS 受限环境中，由于受到遮挡和多路径误差的影响，RTK 定位误差往往较大甚至无法输出定位结果。然而，连续的高精度定位对一些动态定位应用非常重要。同时，在 GNSS 信号中断后模糊度的恢复时间将直接决定高精度定位的可用性。因此，本文分析了紧组合在短时间 GNSS 信号中断后的紧组合位置漂移误差以及中断后模糊度

恢复的时间。

为了评估紧组合在短时间 GNSS 信号中断后的位置漂移误差水平，在载体不同的动态下仿真了 8 个 GNSS 信号完全中断时间段，中断时长分别为 5、10、15、20、25 和 30 s。图 3.11 给出了 GPS/BDS/GLONASS RTK/INS 紧组合在 8 个不同的仿真时间段内 GNSS 信号中断 5, 10, 15, 20, 25 和 30 s 时位置漂移误差。可以看出，在中断时长相同的情况下，位置漂移误差具有较大的差异，这主要是由于载体的动态以及信号中断期间 IMU 传感器的误差导致的。显然，无论在哪个仿真时间段内，位置漂移误差均随着中断时间的增加而迅速增加。

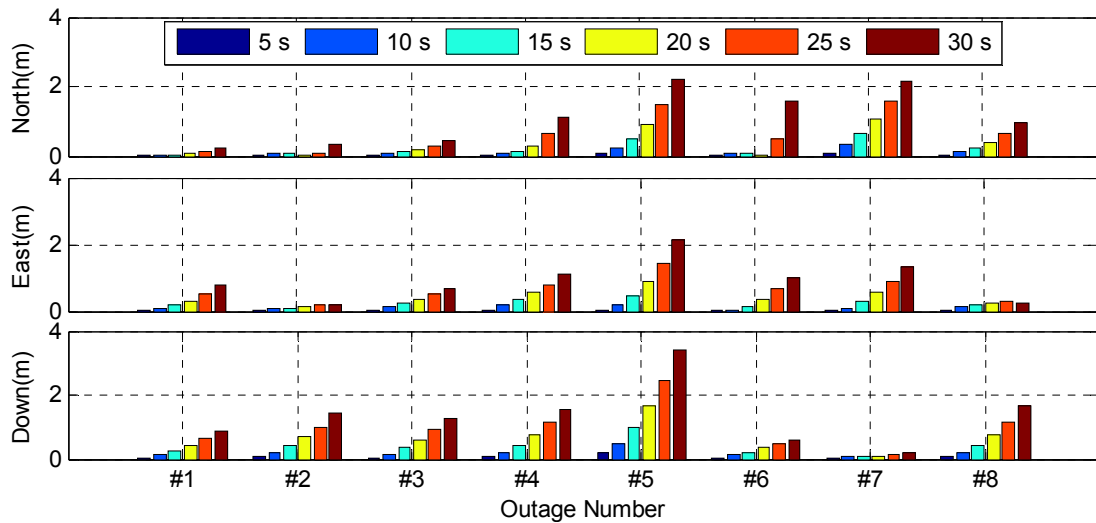


图 3.11 GPS/BDS/GLONASS RTK/INS 紧组合在 GNSS 信号中断 5, 10, 15, 20, 25 和 30 s 时位置漂移误差 (8 个仿真段)

表 3.5 给出了 GPS/BDS/GLONASS RTK/INS 紧组合在 GNSS 信号中断 5, 10, 15, 20, 25 和 30 s 时位置漂移误差统计。从表中可以看出，紧组合算法在北、东、地三个方向上的位置漂移误差 RMS 从中断 5 s 的 4.8 cm、3.9 cm 和 8.3 cm 迅速增加到中断 30 s 时的 1.352 m、1.096 m 和 1.639 m，且在北、东、地三个方向上的最大位置漂移误差达到 2.196 m、2.134 m 和 3.381 m。在 GNSS 信号中断期间，由 INS 机械编排给出连续的位置信息，因此误差漂移的大小主要取决于 IMU 传感器的性能和信号中断时长。

表 3.5 GPS/BDS/GLONASS RTK/INS 紧组合在 GNSS 信号完全中断 5, 10, 15, 20, 25 和 30 s 时位置漂移误差统计

Outage Duration (s)		5	10	15	20	25	30
RMS (m)	North	0.048	0.156	0.316	0.535	0.861	1.352
	East	0.039	0.126	0.270	0.481	0.757	1.096
	Down	0.083	0.236	0.473	0.788	1.177	1.639
Max (m)	North	0.101	0.327	0.661	1.087	1.609	2.196
	East	0.054	0.204	0.482	0.886	1.436	2.134
	Down	0.170	0.492	0.986	1.635	2.436	3.381



图 3.12 给出了卫星截止高度角为 15°, 20°, 25°, 30°, 35° 和 40° 时 GPS/BDS/GLONASS RTK 及其对应的 RTK/INS 紧组合在不同时长的 GNSS 中断后模糊度首次固定的平均时间。从图中可以看出, GPS/BDS/GLONASS RTK 及其对应的 RTK/INS 紧组合在截止高度角为 15° 到 35° 的区间内, 模糊度在 2 s 内可以恢复, 且 RTK/INS 紧组合并没有体现明显优势。但是, 当截止高度角为 40° 时, GPS/BDS/GLONASS RTK 的模糊度恢复性能明显下降, 这是由于此时的 RTK 模型强度较差。相比较而言, 当信号中断时长小于 20 s 时, RTK/INS 紧组合的模糊度恢复性能要优于 RTK; 当信号中断时长进一步增加时, RTK/INS 紧组合的模糊度恢复性能将与 RTK 相当, 因为此时紧组合的定位误差较大, 对辅助模糊度固定作用较小。显然, 在 GNSS 受限环境中单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合相较于多模 GNSS RTK 具有较大的优势。

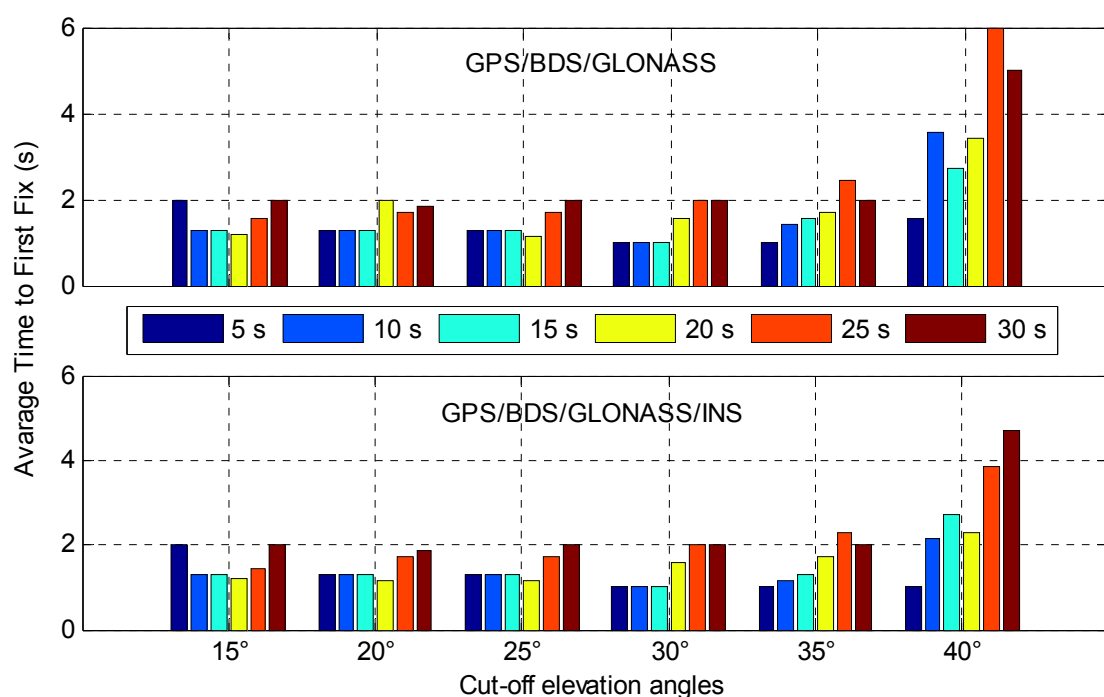


图 3.12 卫星截止高度角为 15°, 20°, 25°, 30°, 35° 和 40° 时 GPS/BDS/GLONASS RTK 及其对应的 RTK/INS 紧组合在不同时长的 GNSS 中断后模糊度首次固定的平均时间

### 3.7.2 城市复杂环境

#### 3.7.2.1 车载测试描述与数据处理方法

该组数据是 2015 年 6 月 12 日在武汉市城区采集的车载测试数据, 测试时长约为 45 分钟, 其轨迹如图 3.13(a)所示。测试包含的典型场景有: 相对开阔的城市道路和被树木、高架桥遮挡的路段, 该测试环境属于亚密集城市环境 (Sub-dense urban), 如图 3.13(b)所示。图 3.13(c)给出了车载测试平台和几套组合导航设备, 其中战术级 POS310 (光纤

陀螺) 和 MEMS 级 POS1100 将用于下面的数据处理与分析, 两款 IMU 的数据采样率均为 200 Hz, 其性能参数如表 3.6 所示。

基准站设置在武汉大学教学实验大楼楼顶, 并使用 Trimble NetR9 多频多模 GNSS 接收机采集 1 Hz 的双频 GPS、BDS 和 GLONASS 原始伪距和相位观测数据。流动站采用 Trimble BD982 OEM 板卡采集双频 GPS、BDS 和 GLONASS 原始伪距和相位观测数据, 数据采样率为 1 Hz, 其中 GPS、BDS 和 GLONASS 的单频数据将用于本文的算法验证与性能评估, 双频数据则用于计算参考结果。由于流动站和基准站之间的距离小于 7 km, 因此数据处理中不考虑双差后残余的电离层和对流层误差。

数据处理中, 非差 GPS、BDS 和 GLONASS 载波相位观测值在天顶方向的测量精度均设置为 3 mm, GPS 和北斗 MEO、IGSO 卫星的伪距测量精度设为 0.35 m, 而北斗 GEO 和 GLONASS 卫星的伪距测量精度设置为 0.5 m。

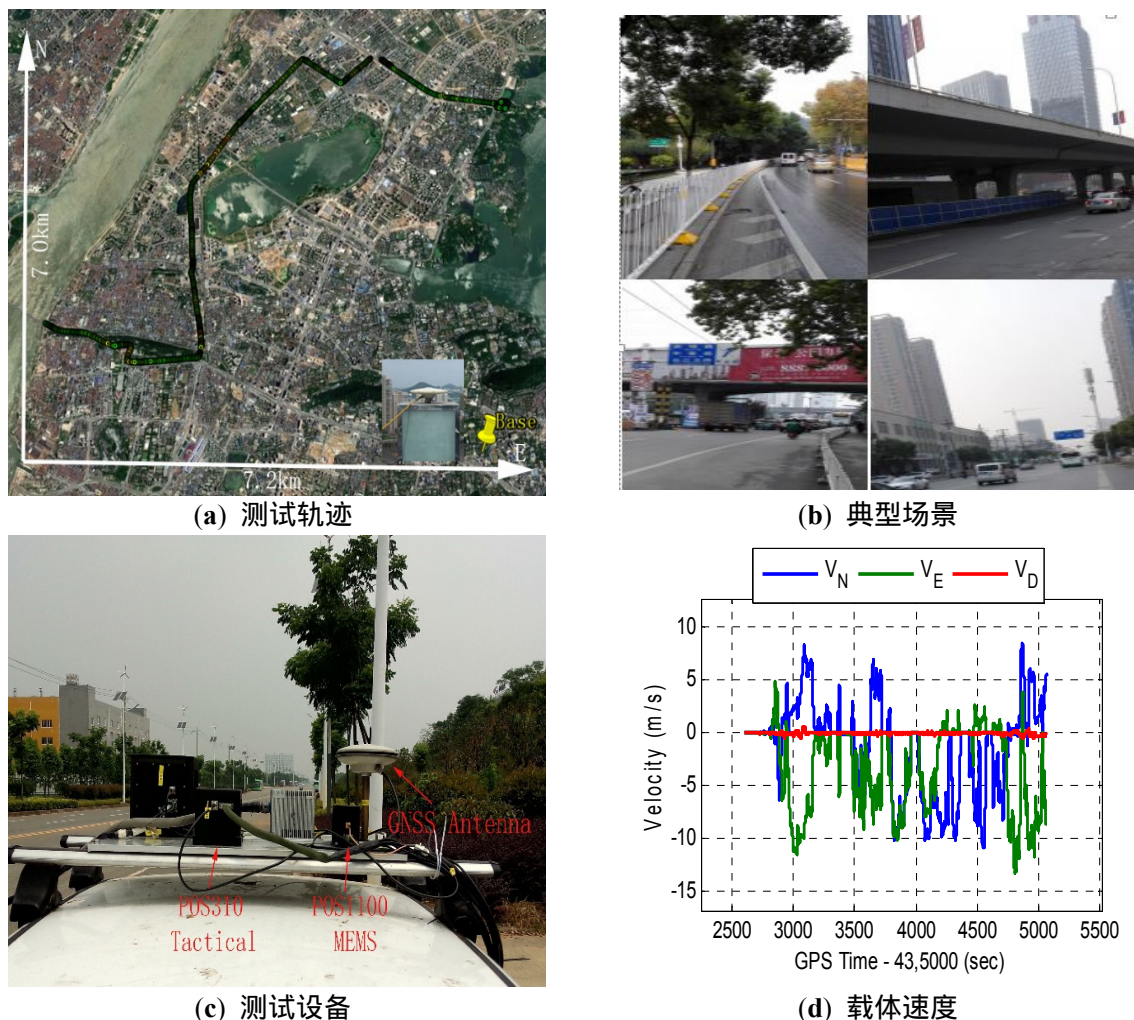


图 3.13 车载测试描述

表 3.6 车载测试中使用的 IMU 性能参数

IMU	级别	零偏稳定性		随机游走	
		陀螺 ( $^{\circ}/h$ )	加表 (mGal)	角度 ( $^{\circ}/\sqrt{h}$ )	速度 ( $m/s/\sqrt{h}$ )
POS310	战术级	0.5	300	0.05	0.10
POS1100	MEMS	10.0	1500	0.33	0.18

### 3.7.2.2 卫星可见性分析

相较于开阔天空环境，城市环境下卫星跟踪的情况更加复杂，图 3.14 给出了截止高度角为  $15^{\circ}$  时 GPS、BeiDou 和 GLONASS 的卫星可见性。其中，GPS 卫星的 PRN 号为 1 到 32，北斗卫星的 PRN 号为 33 到 67，GLONASS 卫星的 PRN 号为 68 到 91。当前卫星星座中，GPS 和 GLONASS 星座均由 MEO 卫星组成，而北斗星座则由 MEO、IGSO 和 GEO 三种不同轨道的卫星组成。在本次车载测试中，有 4 颗 GEO 卫星 (C33、C35、C36、C37) 和 5 颗 IGSO 卫星 (C38-C42) 被跟踪到，但是没有跟踪到 MEO 卫星。从图中可以看出，由于城市中高楼、高架桥和树木等遮挡的影响，GNSS 卫星信号的跟踪连续性很差，最长的信号中断时长约为 2 分钟，其中只跟踪到 1-2 颗卫星。显然，多模 GNSS 能提供更多的可见卫星，这对于复杂环境下高精度定位具有重大意义。

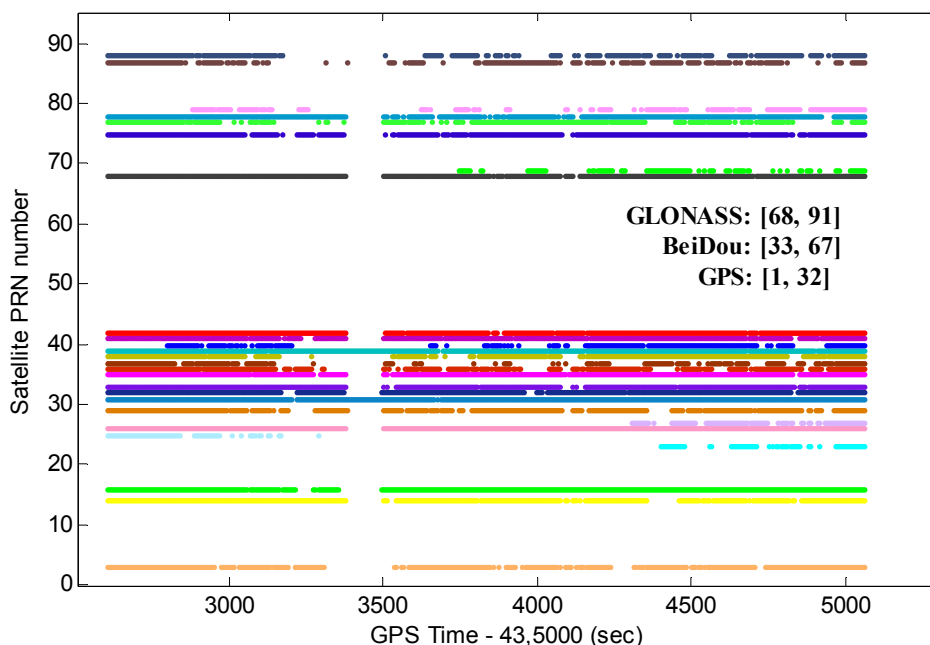


图 3.14 截止高度角为  $15^{\circ}$  时 GPS ( $1 \leq PRN \leq 32$ )、BeiDou ( $33 \leq PRN \leq 67$ ) 和 GLONASS ( $68 \leq PRN \leq 91$ ) 的卫星可见性

图 3.15 (a)和(b)分别给出了截止高度角为  $15^{\circ}$  时 GPS (G)、GPS+BDS (G+C) 和

GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)的可见卫星数及其对应的 PDOP 值。从图中可以看出，GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的可用卫星数显著增加且极大地改善了 PDOP。统计结果表明，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 的平均可见卫星数分别为 6.0、12.3 和 16.5，对应的平均 PDOP 值分别为 3.12、2.05 和 1.71；相较于单 GPS，多模 GNSS 的 PDOP 改善了约 34.3%-45.2%。

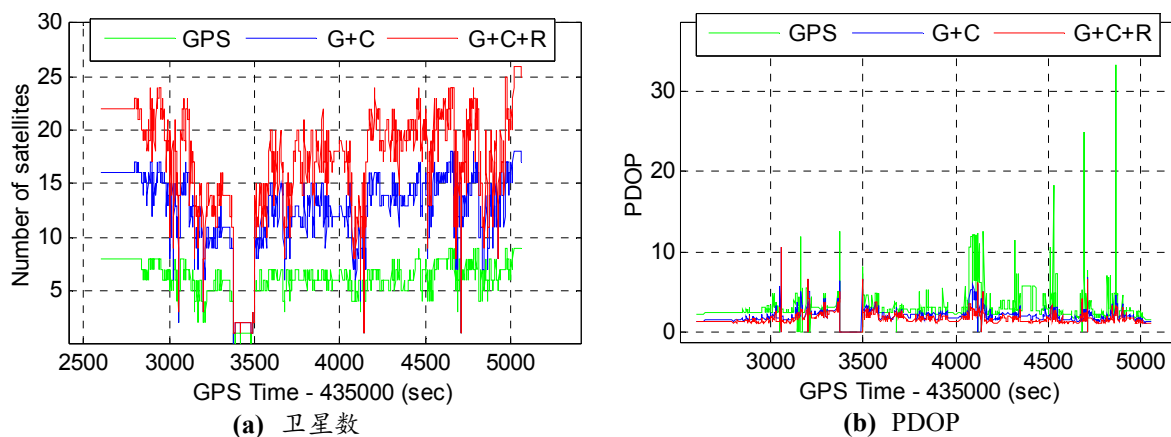


图 3.15 截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS (G)、GPS+BDS (G+C) 和 GPS/BDS+GLONASS (G+C+R) 的可见卫星数与其对应的 PDOP 值

### 3.7.2.3 紧组合抗差性能分析

由于在城市复杂环境下 GNSS 观测量容易受到粗差的影响，因此 GNSS 高精度定位的一个关键问题是粗差探测与剔除。一般来讲，GNSS 的载波相位受到多路径等误差的影响较小，而伪距观测值的多路径误差则可以达到数十米(Carcanague et al., 2013)。如前文所述，正常的紧组合卡尔曼滤波新息服从零均值的分布，因此如果滤波新息含有较大偏差，则该新息对应的观测值将含有粗差。图 3.16 给出了截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS+BDS+GLONASS 的所有可见卫星的伪距双差新息序列。从中可以看出，双差伪距观测值中含有几处较大的粗差（红色圆圈中的点），大部分的伪距观测值对应的滤波新息在  $\pm 2\text{ m}$  以内，但是也有较多历元的新息含有较小幅度的偏差。因此，要获取可靠的模糊度固定就必须进行粗差探测与剔除。

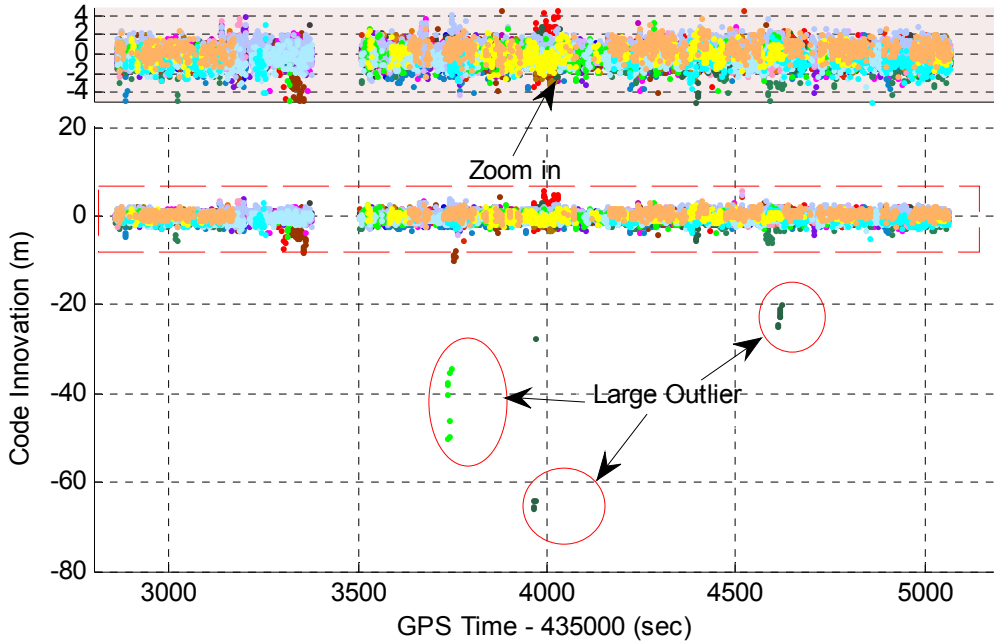


图 3.16 截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS+BDS+GLONASS 的所有可见卫星的伪距双差新息序列

图 3.17 给出了一个含有伪距粗差的测量值对模糊度浮点解估计的影响实例，图中对比了在是否使用抗差方案下解算的模糊度浮点解偏差，模糊度偏差越接近于零表明浮点模糊度更容易被正确固定。可以看出，使用抗差方案时模糊度偏差除了粗差卫星外均小于 0.15 周，粗差卫星的模糊度偏差为 0.26 周。在不使用抗差算法时多数卫星的浮点解受到影响，且粗差卫星对应的模糊度偏差超过 0.6 周，这显然会阻碍正确的模糊度固定。

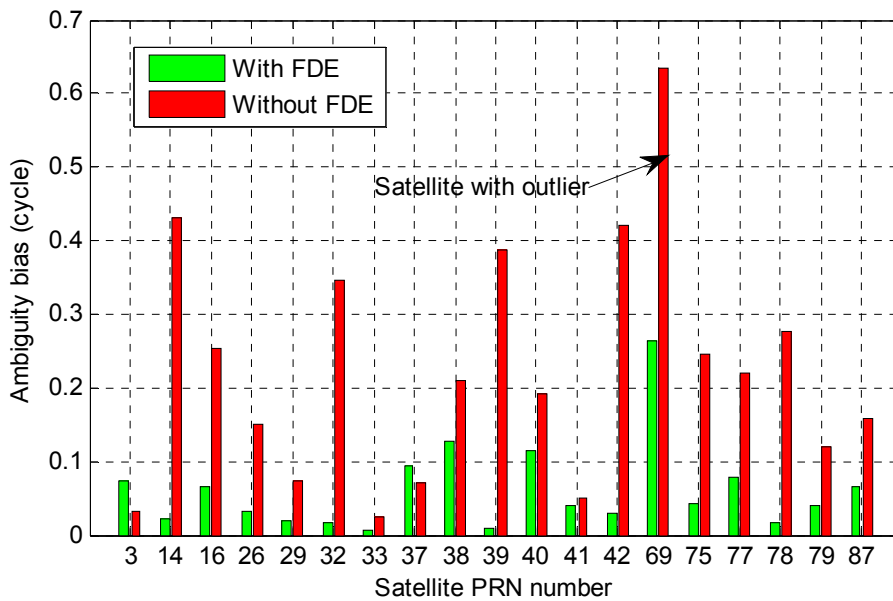


图 3.17 一颗含有伪距粗差的卫星导致的浮点解模糊度偏差(在历元 439,618 s 处)

PRN69 卫星的高度角为  $21.4^\circ$ ，伪距新息为  $-19.8\text{ m}$ ，模糊度偏差定义为为浮点模糊度与真值之间的差值)

为了验证实测环境中在含有伪距测量粗差的情况下高精度定位的可行性，图 3.18 给出了 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合的双差伪距新息 RMS 值与是否采用抗差算法时模糊度固定状态差异对比。其中，模糊度固定差异为 0 表示两种方案的模糊度固定差异相同，即二者均为固定解或者浮点解，而绿色圈表示使用抗差算法才能固定的历元。从图中可以看出，在伪距观测值存在粗差时实现正确的模糊度固定具备可行性。因此，本文中提出的基于新息的抗差紧组合算法能有效探测粗差并对其进行有效建模，从而提高复杂环境下的模糊度固定率。

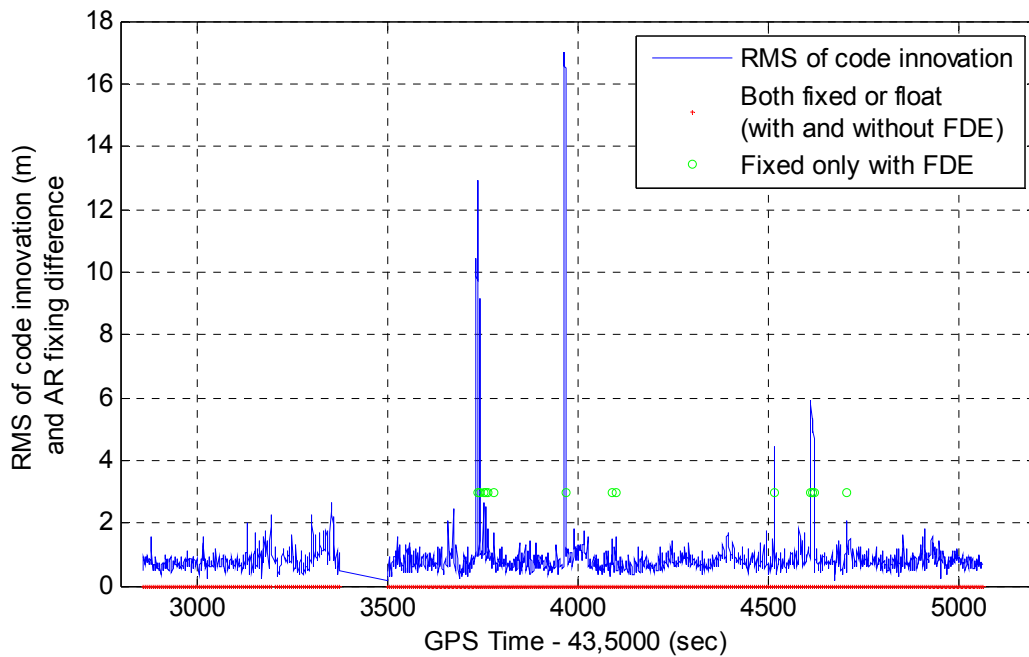


图 3.18 双差伪距新息 RMS 值与是否采用抗差算法时模糊度固定状态差异对比 (模糊度固定差异为 0 表示两种方案的模糊度固定差异相同)

### 3.7.2.4 紧组合残差分析

在基于载波相位的高精度定位中，一般可以通过分析模糊度固定解的载波相位残差分布来确定模糊度固定的正确性和定位精度。图 3.19 和图 3.20 分别给出了截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合的双差载波相位残差及其对应的 RMS。从图 3.19 可看出，各颗卫星的双差载波相位残差小于  $0.1\text{ m}$ ，且大部分分布在  $0.02\text{ m}$  以内。其中残差偏大的几颗卫星可能是由于相位观测值中含有多路径误差，它们对应的 RMS 也较其他卫星偏大 (图 3.20，一颗北斗卫星和一颗 GLONASS 卫星)，这可能与它们的高度角较低有关。

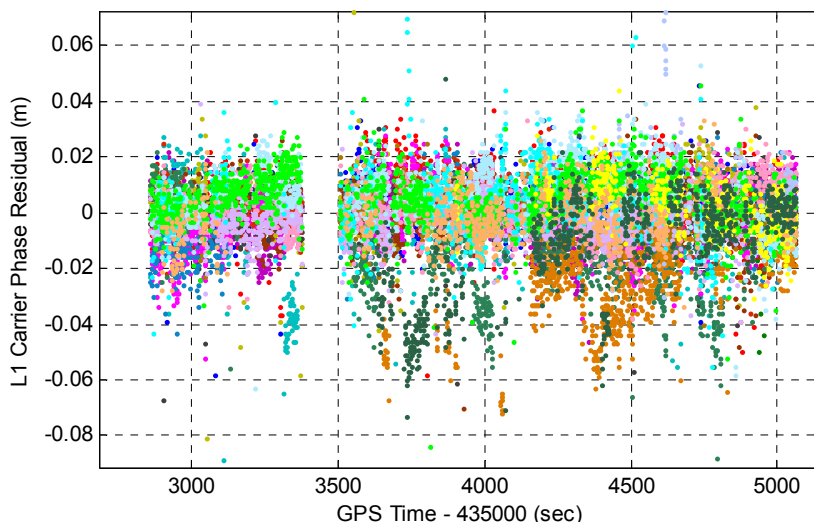


图 3.19 截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合的双差载波相位残差 (每种颜色对应一个双差观测)

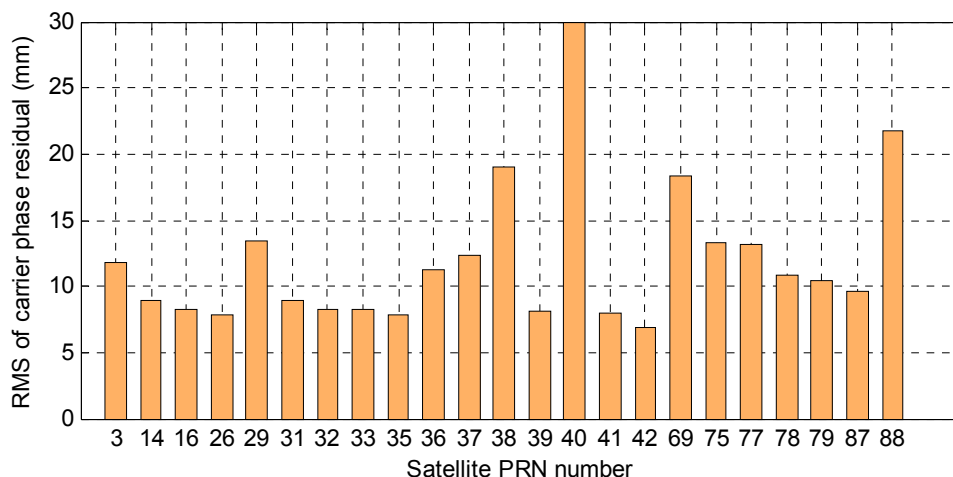


图 3.20 截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合各颗卫星的载波相位残差 RMS

### 3.7.2.5 模糊度固定与定位性能分析

为了评估单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合算法在城市环境下的模糊度固定和定位性能，首先利用战术级 POS310（光纤陀螺）和双频 GPS+BDS+GLONASS 观测数据进行 RTK/INS 紧组合解算，然后利用 2.7.3 节介绍的最优平滑算法获取参考结果。

由于城市环境中信号频繁的中断失锁，所以下面的数据处理将采取单历元模糊度解算的策略，从而避免了周跳探测等数据预处理过程。同时，单历元模糊度固定也可以较明显地体现出各种组合系统在模糊度固定性能方面的差异。本文主要对比分析 GPS、GPS+BDS、GPS+BDS+GLONASS 单频和双频 RTK 及其与相应的单频 RTK/INS 紧组合

的模糊度固定和定位性能。此外，为了比较 RTK 和 RTK/INS 紧组合之间的差异，数据分析中只统计了 GNSS 定位可用时的历元(如对单 GPS 而言至少观测到 4 颗可用卫星)。

图 3. 21 给出了卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R) 分别对应的 L1 RTK (上面两行)、L1+L2 RTK (中间两行) 和 L1 RTK/INS (下面两行) 紧组合的定位结果与参考结果的位置差异时间序列。其中，正确固定解用绿色点表示，错误固定解和浮点解则分别用红色点和灰色点表示。本文采用如下策略判断模糊度固定解的正确性：固定解的位置与参考结果的位置差异在北、东方向小于 0.1 m 且在高程方向上的差异小于 0.15 m。



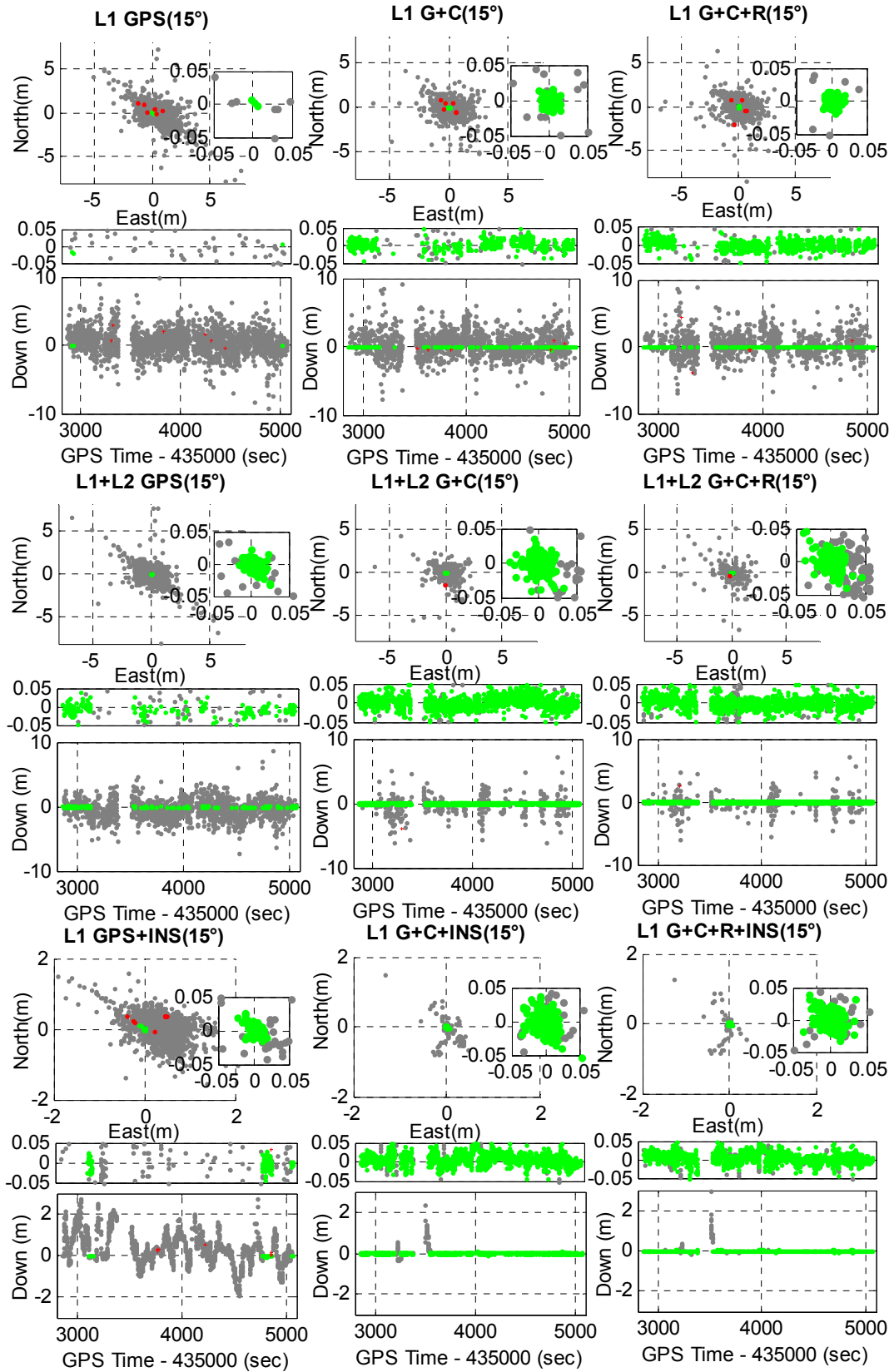


图 3.21 卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的定位结果与参考结果的位置差异时间序列 (其中正确固定解用

绿色点表示, 错误固定解和浮点解分别用红色点和灰色点表示)

从上图中可以看出, 单频 GPS RTK 的模糊度固定和定位性能非常差, 意味着城市环境下很难使用单频 GPS RTK 进行高精度定位。加入 BDS 后, 模糊度固定性能得到大幅度提升, 加入 GLONASS 则可以进一步提升模糊度固定性能, 这充分体现了多模 GNSS 在复杂环境下的优势。与单频 GPS RTK 相比, 双频 RTK 可以显著提高模糊度固定性能, 但是其模糊度固定性能较单频多模 GNSS RTK 要差。显然, 相较于单频多模 GNSS RTK, 双频多模 GNSS RTK 模糊度固定和定位性能进一步得到显著提升, 且浮点解的比例大幅度减少。

从图 3.21 中还可以看出, 相较于单频多模和双频多模 RTK, 单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定和定位性能可得到进一步提升, 浮点解比例更少且浮点解的位置精度更高。与单频 GPS RTK 相比, GPS RTK/INS 紧组合在模糊度固定性能上改善较小, 但是浮点解的精度和稳定性得到显著提高, 这是由于 INS 的短期高精度约束。对于城市环境下的 RTK 定位而言, 由于信号的频繁中断使得浮点解的精度依赖于伪距的精度, 而伪距通常含有较大的多路径误差。因此, GNSS/INS 组合导航在复杂环境下的高精度定位方面能体现出明显优势。

图 3.22 卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率。模糊度固定率为正确固定的历元占有所有历元的比例, 其反映了高精度 RTK 定位的可用性。根据图中的统计结果, 单频 GPS RTK 的模糊度固定率仅为 0.1%, 而单频 GPS+BDS RTK 和 GPS+BDS+GLONASS RTK 的模糊度固定率分别增长到 25.1%和 44.7%。显然, 双频多模 RTK 进一步显著地提高了模糊度固定率, GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 的模糊度固定率分别提高到 75.8%和 76.7%, 而双频 GPS RTK 只有较低的 10.4%的模糊度固定率, 这是由于 GPS 的可用卫星数较少且几何构型较差导致的。相较于双频多模 RTK, 单频多模 RTK/INS 紧组合可以进一步提高模糊度固定率, GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 对应的 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率都达到 86.1%, 意味着此次车载测试中有超过 86%时间可获得厘米级的高精度定位。

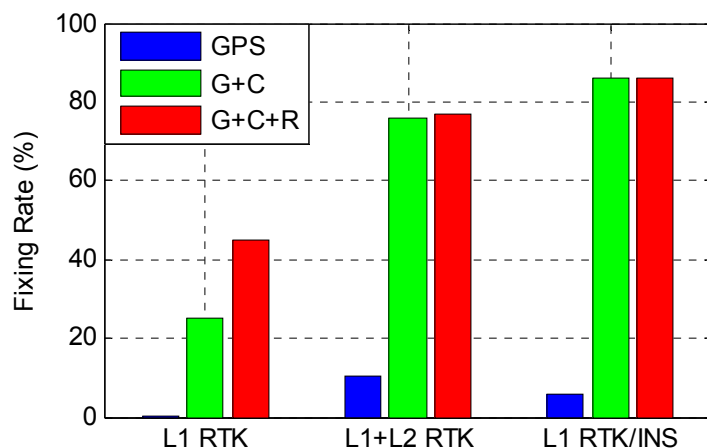


图 3.22 卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率

在城市环境下进行 GNSS 高精度定位时，测量值往往受到多路径误差的影响，特别是一些低高度角的卫星测量值。这些含有误差的测量值将会影响模糊度的解算及其固定成功率。相较于单 GPS 系统，多模 GNSS 提供了更多的可用卫星，这为使用较高的卫星截止高度角进行高精度定位提供了可能。

图 3.23 给出了 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$  截止高度角下对应的 L1 RTK（上面两行）、L1+L2 RTK（中间两行）和 L1 RTK/INS（下面两行）紧组合的定位结果与参考结果的位置差异时间序列。从图中可以看出，双频 GPS+BDS+GLONASS RTK 的模糊度固定和定位性能显著优于对应的单频 RTK，特别是在截止高度角较高时。同时，双频 RTK 的定位性能没有随着截止高度角升高而显著降低，而单频 RTK 的性能则显著降低。与双频多模 RTK 相比，单频多模 RTK/INS 紧组合的模糊度固定和定位性能得到进一步提升，其浮点解的比例更少且位置精度更高。

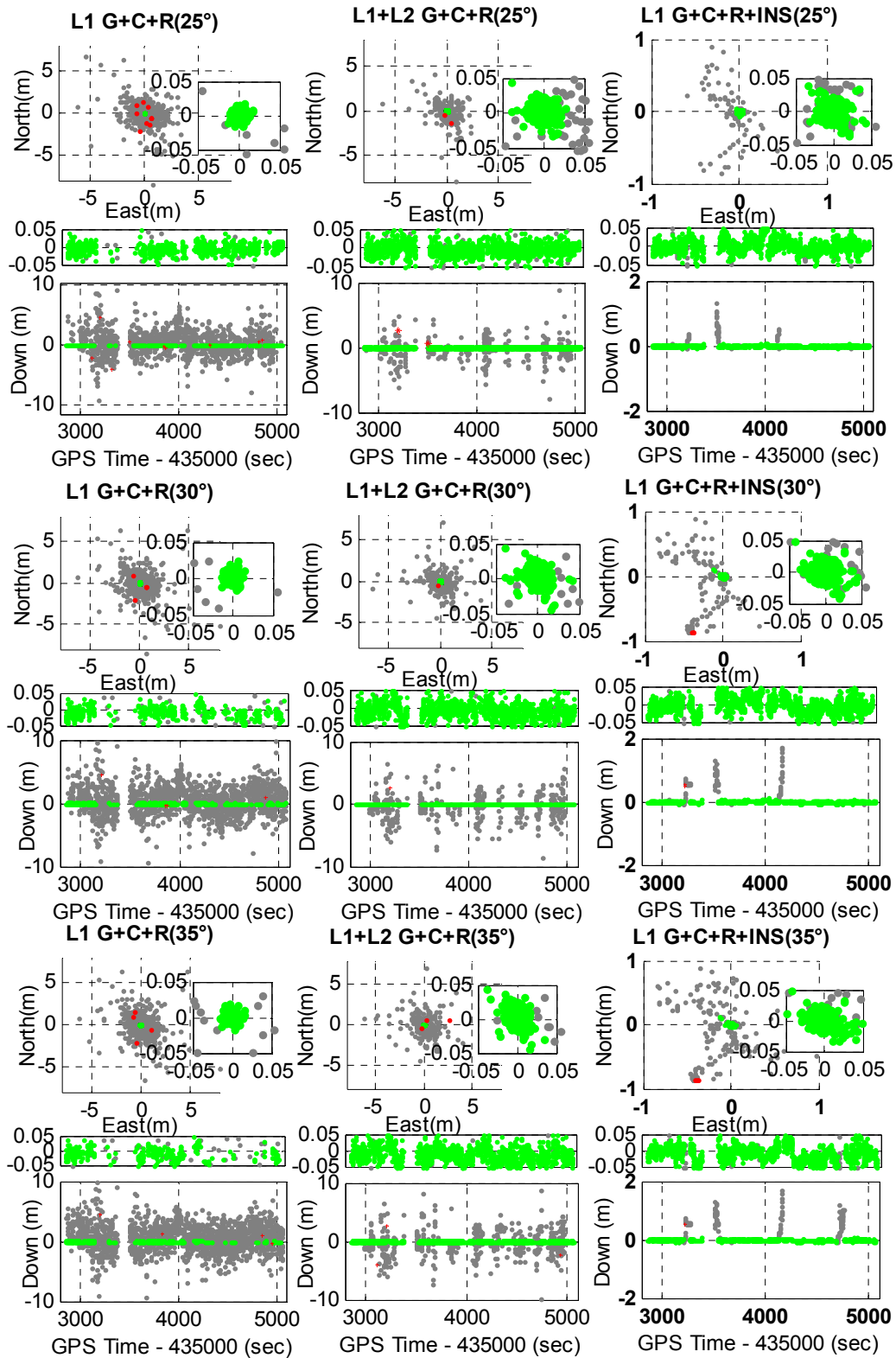


图 3.23 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在 25, 30, 35°截止高度角下对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的定位结果与参考结果的位置差异时间序列 (其中正确固定解用绿色点表示, 错误固定解和浮点解分别用红色点和灰色点表示)

图 3. 24 给出了 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在 25°, 30°, 35°截止高度角下对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率。根据图中的统计结果，单频 GPS+BDS+GLONASS RTK 的模糊度固定率在截止高度角为 25°时为 36.1%，截止高度角为 30°时降低到 20.3%，截止高度角为 35°时进一步降低到 14.7%。相较而言，双频 GPS+BDS+GLONASS RTK 模糊度固定率显著提高，在截止高度角为 25°, 30°, 35°时对应的模糊度固定率分别为 77.7%、74.3%和 71.5%。单频 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合的模糊度固定率进一步提升，在截止高度角为 25°, 30°, 35°时相较于 GPS+BDS+GLONASS RTK 的提升百分比分别为 8.5%、10.3%和 10.7%。

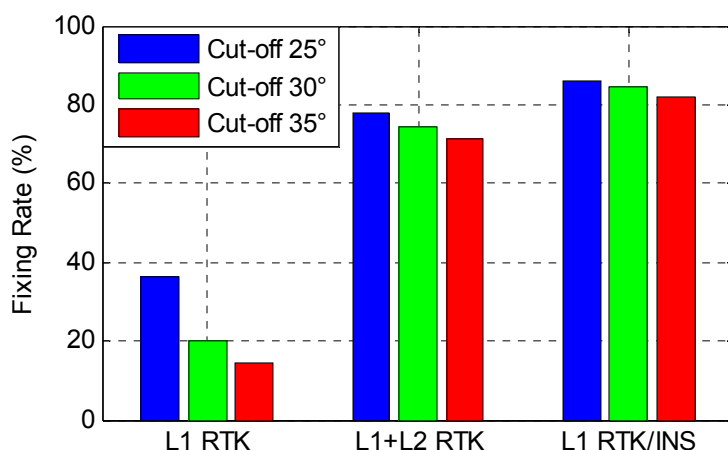


图 3. 24 GPS+BDS+GLONASS 组合系统在 25°, 30°, 35°截止高度角下对应的 L1 RTK、L1+L2 RTK 和 L1 RTK/INS 紧组合的模糊度固定率

### 3.7.2.6 GNSS 中断期间位置漂移误差分析

对于车载等动态定位应用，载体不可避免地要通过隧道或者有高楼遮挡的道路。在这种情况下，信号的频繁失锁使得组合系统的数据处理变得更加复杂，同时也会导致系统的定位误差显著增加。GNSS/INS 组合导航中通常使用仿真 GNSS 信号中断的方式来考察组合导航在中断期间的位置误差漂移，然而由于实际环境的复杂性，仿真往往并不能代表真实的误差水平。本文采用实测数据中的 GNSS 信号中断来评估紧组合导航误差。

图 3. 25 给出了车载测试中截止高度角为 15°时 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的 GNSS 信号中断时长，图中放大的小图给出了更详细的信息。可以看出，最长的信号中断时长超过 2 分钟，而大部分中断均为小于 10 s 的短时中断。

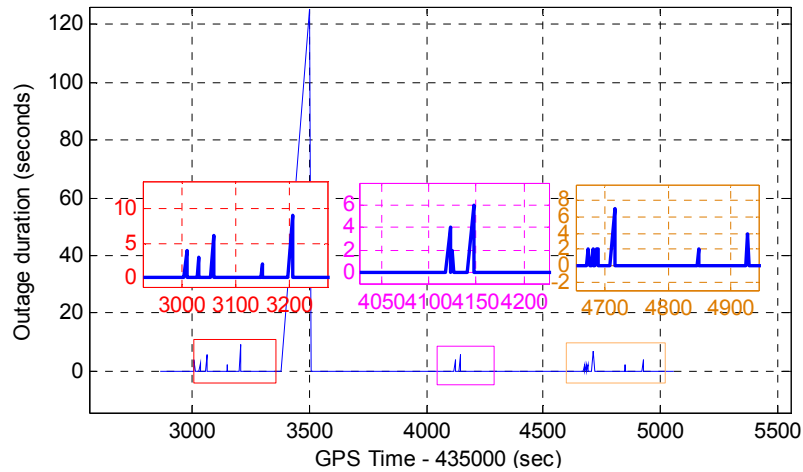


图 3.25 截止高度角为 15°时 GPS+BDS+GLONASS 组合系统的 GNSS 中断时长

由于实测实验中 GNSS 信号中断期间的高精度位置参考信息无法获取，所以本文将使用最大漂移误差来评估组合导航系统在 GNSS 信号中断后的定位性能。一般而言，组合导航系统的定位误差在 GNSS 信号中断恢复前达到最大值，而此时的高精度位置参考值可以利用反向平滑算法精确求得。表 3.7 给出了车载测试出现的所有 GNSS 信号中断时长及其对应的最大位置漂移误差。从中可以看出，在中断时长 127 s 后，紧组合算法在北、东、地三个方向上的位置误差漂移达到 5.235 m、17.393 m 和 28.173 m。显然，随着信号中断时长的增加，位置误差漂移也逐渐变大，这与传统的仿真结果和理论分析吻合。对于 MEMS 惯导而言，由于传感器误差在 GNSS 信号中断后无法进行估计并补偿，其位置误差漂移将随着时间的推移呈现指数级的增长，因此需要考虑使用其它的辅助手段来进行增强。

表 3.7 GNSS 信号中断时长及其对应的最大位置漂移误差

Outage Items	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13
Duration (s)	4	3	6	2	9	127	4	6	2	2	7	2	4
MAX North (cm)	0.4	1.2	5.6	1.9	0.9	523.5	1.9	5.8	7.1	6.8	6.7	1.5	3.2
MAX East (cm)	6.2	0.4	9.3	1.7	15.3	1739.3	1.1	14.6	1.5	0.3	14.7	4.2	3.2
MAX Down (cm)	7.1	1.6	5.5	1.4	4.8	2817.3	6.9	1.1	2.3	8.7	1.4	1.4	1.7
MAX 3D (cm)	9.4	2.0	12.2	2.9	16.1	3352.1	7.2	15.7	7.6	11.0	16.2	4.7	4.8

### 3.8 本章小结

为了增强单频 RTK 在复杂动态环境下的高精度定位性能，本章深入研究了基于低成本 MEMS-IMU 的单频多模 RTK/INS 紧组合技术。首先，介绍了多系统 GNSS 定位的时空基准并对其进行了统一，并详细阐述了多模 GNSS RTK 定位的函数模型和随机模型的确定，重点讨论了 GLOASS 模糊度固定方法；然后，阐述并推导了附加模糊度参

数和独立解算模糊度参数的两种 RTK/INS 紧组合数学模型,包括各自状态方程、观测方程的建立以及 INS 辅助模糊度固定方法;同时,针对复杂 GNSS 环境下的 GNSS 观测粗差问题,提出了一种适用于 RTK/INS 紧组合的两步抗差算法模型;最后,介绍了 RTK/INS 紧组合算法的框架流程,并通过开阔天空环境和城市复杂环境下的两组车载测试数据对 RTK/INS 紧组合算法在模糊度固定、重收敛、定位和抗差等方面的性能进行了全面评估与分析。根据对车载实验结果的分析可得出如下结论:

在开阔天空环境下,单频 GPS 的单历元模糊度固定率很低(仅 8.4%),表明单频 GPS RTK 无法采用单历元模式进行高精度定位。相较而言,单频多系统 GNSS RTK 和 RTK/INS 紧组合体现出了显著优势,特别是在截止高度角较高的情况下。实验结果表明,在截止高度角为  $35^\circ$  时,单频多系统 GNSS RTK/INS 紧组合基本能实现单历元模糊度固定,而且动态定位精度为厘米级。

在城市等复杂 GNSS 环境下,GNSS 观测值不可避免地受到多路径误差的影响,进而降低模糊度固定率与可靠性,本章提出的基于滤波新息的两步抗差紧组合算法有效地提高了复杂 GNSS 环境下的紧组合模糊度固定率。由于 GPS 可见卫星数有限,单 GPS 系统的模糊度固定和定位性能非常差,即使采用双频 GPS 观测值(实验中模糊度固定率仅 10.4%);多系统 GNSS 极大地改善了卫星可见性和卫星几何构型,在短基线条件下,单频多模 GNSS RTK 的模糊度固定率显著优于双频单 GPS RTK,加入 INS 辅助后,单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定和定位性能甚至优于双频多系统 GNSS RTK,而且随着截止高度角的增加( $25^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $35^\circ$ ),单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定和定位性能只有小幅度降低。因此,在短基线情况下,采用单频多系统 GNSS 与低成本 MEMS-IMU 进行组合的 RTK/INS 紧组合技术在复杂 GNSS 环境下具备高精度定位的能力,而且较双频多系统 GNSS RTK 更有优势。

## 4 惯导相对约束辅助模糊度固定模型

### 4.1 引言

如第三章所述, INS 绝对位置约束可以极大地提高 GNSS RTK 的模糊度固定率和可靠性,前提是保证 INS 绝对位置约束的正确性。但是,在模糊度确认的过程中如果接受了错误的模糊度并将其用于 RTK/INS 紧组合滤波更新,这时紧组合的位置分量将会出现偏差。如果继续使用带有偏差的绝对位置约束去辅助模糊度解算,那么该错误的约束将会阻止后续历元模糊度的正确固定(影响浮点模糊度的估计),甚至导致紧组合滤波发散。由于当前模糊度确认理论还不成熟(刘经南 et al., 2014),因此在实践过程中不可避免地会出现模糊度错误固定的情况。对于单历元 RTK 模糊度固定而言,各个历元的模糊度解算相互独立;而对于 RTK/INS 紧组合来讲,上个历元的位置信息将通过 INS 机械编排算法传递到当前历元,进而影响当前和后续历元的模糊度解算。如第一章所述,虽然已有文献中有一些针对 GNSS/INS 组合导航的质量控制方法,但是对于厘米级定位的 RTK/INS 紧组合而言,一周或几周模糊度偏差引起的组合导航系统状态出现有偏的问题,目前仍然缺乏有效的解决方法。

从本质上讲,GNSS/INS 组合导航的绝对状态是由 GNSS 决定的,而 INS 只能提供可靠的相对信息(如相对位置)。在机器人和计算机视觉领域,IMU 测量值被预积分为相邻两帧影像间的相对约束测量值,称为 IMU 预积分(IMU pre-integration)测量值(Forster et al., 2017)。受此思想启发,本章提出了一种新的 INS 辅助模糊度固定的算法模型,利用 INS 提供的相对测量约束辅助模糊度固定,从而避免带有偏差的 INS 绝对位置约束阻碍模糊度正确固定,克服传统 INS 辅助模糊度固定方法的重大缺陷。

本章首先结合 IMU 预积分理论给出 INS 相对位置测量值的计算表达式;然后,阐述 INS 相对位置测量值辅助模糊度解算的原理,并给出 INS 相对位置增量辅助周跳探测的方法;最后,通过一组车载实验数据对所提出的算法的有效性进行验证。

### 4.2 IMU 预积分测量值

IMU 的三轴陀螺和三轴加速度计可以测量出载体相对于惯性系的旋转角速度和加速度,考虑到其测量值受零偏和噪声的影响,对导航微分方程进行积分(假设陀螺和加速度计的输出在 $\Delta t$ 间隔内不变),可得 IMU 位置、速度和姿态的更新方程为:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}(t) \text{Exp} \left( \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B(t) - \mathbf{b}_g(t) - \boldsymbol{\eta}_{gd}(t) \right) \Delta t \right) \\
 \mathbf{v}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}_e \Delta t + \mathbf{R}(t) \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B(t) - \mathbf{b}_a(t) - \boldsymbol{\eta}_{ad}(t) \right) \Delta t \\
 \mathbf{p}(t + \Delta t) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t) \Delta t + 0.5 \mathbf{g}_e \Delta t^2 + \\
 &\quad 0.5 \mathbf{R}(t) \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B(t) - \mathbf{b}_a(t) - \boldsymbol{\eta}_{ad}(t) \right) \Delta t^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

式中,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$  和  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B$  分别为陀螺和加速度计的测量值;  $\mathbf{b}_g$  和  $\mathbf{b}_a$  分别为陀螺和加速度计的零偏;  $\boldsymbol{\eta}_{gd}$  和  $\boldsymbol{\eta}_{ad}$  分别为陀螺和加速度计的噪声;  $\text{Exp}$  为指数映射运算符, 它将旋转矢量映射到旋转矩阵, 如下:

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\phi}) = \cos\|\boldsymbol{\phi}\| \mathbf{I} + (1 - \cos\|\boldsymbol{\phi}\|) \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\phi}^T + \sin\|\boldsymbol{\phi}\| [\boldsymbol{\phi} \times] \tag{4.2}$$

根据式(4.1), 对相邻两个 GNSS 观测历元  $i$  和  $j$  之间的所有 IMU 测量值进行积分可得:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_j &= \mathbf{R}_i \prod_{k=i}^j \text{Exp} \left( \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^k - \mathbf{b}_g^k - \boldsymbol{\eta}_{gd}^k \right) \Delta t \right) \\
 \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_i + \mathbf{g}_e \Delta t_{ij} + \prod_{k=i}^j \mathbf{R}_k \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B^k - \mathbf{b}_a^k - \boldsymbol{\eta}_{ad}^k \right) \Delta t \\
 \mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_i + \prod_{k=i}^j \left[ \mathbf{v}_k \Delta t + 0.5 \mathbf{g}_e \Delta t^2 + 0.5 \mathbf{R}_k \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B^k - \mathbf{b}_a^k - \boldsymbol{\eta}_{ad}^k \right) \Delta t^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中,  $\Delta t_{ij} = \prod_{k=i}^j [\Delta t]$ ,  $(\cdot)_i = (\cdot)(t_i)$ 。进一步定义如下的相对运动增量:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{R}_{ij} &= \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j = \prod_{k=i}^j \text{Exp} \left( \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^k - \mathbf{b}_g^k - \boldsymbol{\eta}_{gd}^k \right) \Delta t \right) \\
 \Delta \mathbf{v}_{ij} &= \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}_e \Delta t_{ij}) = \prod_{k=i}^j \Delta \mathbf{R}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B^k - \mathbf{b}_a^k - \boldsymbol{\eta}_{ad}^k \right) \Delta t \\
 \Delta \mathbf{p}_{ij} &= \mathbf{R}_i^T (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - 0.5 \mathbf{g}_e \Delta t_{ij}^2) \\
 &= \prod_{k=i}^j \left[ \Delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + 0.5 \Delta \mathbf{R}_{ik} \left( \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B^k - \mathbf{b}_a^k - \boldsymbol{\eta}_{ad}^k \right) \Delta t^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中,  $\Delta \mathbf{R}_{ik} = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_k$ ,  $\Delta \mathbf{v}_{ik} = \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}_e \Delta t_{ik})$ 。从上式中可以看出, 相对运动增量  $\Delta \mathbf{R}_{ij}$ 、 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 、 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$  则可以只通过相邻历元的 IMU 原始测量值求出, 而与  $t_i$  时刻的载体位置、速度和姿态无关。此时, 相邻历元间的位置增量可表示为:

$$\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i \cdot \Delta \mathbf{p}_{ij} + \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} + 0.5 \mathbf{g}_e \Delta t_{ij}^2 \tag{4.5}$$

显然, 相对位置增量可由初始时刻的姿态  $\mathbf{R}_i$  和速度  $\mathbf{v}_i$  求出, 而与中间时刻的绝对速度和姿态无关。此外, 相对运动增量可以通过迭代的方式进行高效计算:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik+1} = \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \text{Exp}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_g^k) \Delta t \\ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik+1} = \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k - \mathbf{b}_a^k) \Delta t \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ik+1} = \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ik} + \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + 0.5 \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k - \mathbf{b}_a^k) \Delta t^2 \end{cases} \tag{4.6}$$

### 4.3 INS 相对位置辅助模糊度解算原理

如前所述, 惯导的短期高精度特性使它能可靠地提供相对的位置、速度和姿态, 而

惯导的绝对位置、速度和姿态则取决于外界的辅助信息，比如 GPS 位置。如果外界辅助的绝对信息含有偏差，则惯导给出的绝对导航参数也将含有偏差。由于惯导提供的相对位置约束（位置增量约束）至少涉及两个历元的数据，因此以下公式推导将基于两个历元进行，其构成了一个最小滑动窗口，实践中可以根据需要增加滑动窗口的大小用于提高模糊度固定率和可靠性。假设流动站接收机在相邻历元 $t_{k-1}$ 和 $t_k$ 的近似坐标分别为 $\mathbf{X}_{t_{k-1}}^0$ 和 $\mathbf{X}_{t_k}^0$ ，那么接收机在这两个历元的坐标真值可分别表示为：

$$\mathbf{X}_{t_{k-1}} = \mathbf{X}_{t_{k-1}}^0 + \Delta\mathbf{X}_{t_{k-1}} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{X}_{t_k} = \mathbf{X}_{t_k}^0 + \Delta\mathbf{X}_{t_k} \quad (4.8)$$

其中， $\Delta\mathbf{X}_{t_{k-1}}$ 和 $\Delta\mathbf{X}_{t_k}$ 分别为接收机在相邻历元 $t_{k-1}$ 和 $t_k$ 的位置改正项。根据惯导递推的位置增量 $\Delta\hat{\mathbf{X}}_{INS}$ ，可得相邻历元 $t_{k-1}$ 和 $t_k$ 的近似坐标满足如下关系式：

$$\mathbf{X}_{t_k}^0 = \mathbf{X}_{t_{k-1}}^0 + \Delta\hat{\mathbf{X}}_{INS} \quad (4.9)$$

同时，接收机在这两个历元的坐标真值可用惯导递推的位置增量真值表达为：

$$\mathbf{X}_{t_k} = \mathbf{X}_{t_{k-1}} + \Delta\mathbf{X}_{INS} \quad (4.10)$$

综合公式(4.7)、(4.8)、(4.9)、(4.10)可得：

$$\Delta\mathbf{X}_{t_k} - \Delta\mathbf{X}_{t_{k-1}} = \Delta\mathbf{X}_{INS} - \Delta\hat{\mathbf{X}}_{INS} \quad (4.11)$$

上式表明：如果惯导递推的位置增量不含误差，那么相邻历元的位置改正量将相等。显然，该式在相邻历元间构成了一个相对约束关系。该约束将**动态**定位转变为**准静态**定位（考虑到惯导递推的位置增量含有误差），这体现了 INS 提供相对测量的本质。

为了正确利用上述相对约束辅助模糊度解算，需要合理地确定惯导递推的位置增量的精度（可视为一种观测值），其标准差可以通过组合系统滤波器中的速度误差协方差计算得到：

$$\sigma(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{INS}) = \sqrt{\mathbf{P}_{\delta v} \cdot (t_k - t_{k-1})} \quad (4.12)$$

式中， $\mathbf{P}_{\delta v}$ 为组合导航系统滤波器协方差中速度误差对应的协方差子块矩阵。将式(4.11)作为虚拟观测量，并联立相邻历元的伪距、载波相位观测值即可得到如下模糊度解算模型（假设相邻历元的观测卫星相同且载波观测值不含有周跳）：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{P,t_{k-1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\varphi,t_{k-1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{P,t_k} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\varphi,t_k} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{INS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{t_{k-1}} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{H}_{t_{k-1}} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \boldsymbol{\Lambda} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{H}_{t_k} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{H}_{t_k} & \boldsymbol{\Lambda} \\ -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X}_{t_{k-1}} \\ \Delta\mathbf{X}_{t_k} \\ \nabla\Delta\mathbf{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla\Delta\mathbf{P}_{t_{k-1}} - \nabla\Delta\mathbf{r}_{0,t_{k-1}} \\ \lambda\nabla\Delta\boldsymbol{\varphi}_{t_{k-1}} - \nabla\Delta\mathbf{r}_{0,t_{k-1}} \\ \nabla\Delta\mathbf{P}_{t_k} - \nabla\Delta\mathbf{r}_{0,t_k} \\ \lambda\nabla\Delta\boldsymbol{\varphi}_{t_k} - \nabla\Delta\mathbf{r}_{0,t_k} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

由于该方法的模糊度解算模型强度主要由 GNSS 模型确定，因此在实际应用中可以

增加滑动窗口（上述给出的模型的滑动窗口大小为 2）的大小，引入更多历元的 GNSS 观测值来提高模糊度解算的性能和可靠性。鉴于惯导能可靠地给出相对位置增量，该方法在系统状态有偏的情况下也能正确地辅助模糊度解算，而且不同窗口间独立固定的模糊度可以进行互相对比，从而提高模糊度固定可靠性。

#### 4.4 INS 预测的相位增量辅助周跳探测

如上节所述，利用惯导相对约束辅助模糊度涉及多个历元的数据，因此可靠的小周跳探测能力对于提高算法的可用性、可靠性和性能都至关重要。已有相关的研究表明利用高精度的惯导位置预测值能有效且可靠地探测小周跳(Altmayer, 2000; Lee et al., 2003)。与这些利用惯导预测的绝对位置信息计算载波相位观测值再进行周跳探测的方法不同，本文将采用惯导预测的载波相位增量值来进行周跳探测。该方法的基本思路是比较相邻历元的双差载波相位测量值增量与 INS 递推的双差载波相位增量，下面对该方法公式进行推导。对卫星  $j$ ，相邻历元 INS 递推的双差载波相位增量可表示为：

$$\delta\varphi_{INS}^j = \frac{1}{\lambda} (\nabla\Delta\hat{\rho}^j(t_k) - \nabla\Delta\hat{\rho}^j(t_{k-1})) \quad (4.14)$$

其中  $\nabla\Delta\hat{\rho}$  为使用惯导递推的 GNSS 天线处的位置计算的站星双差几何距离； $\lambda$  为载波相位的波长。类似地，接收机在相邻历元  $t_{k-1}$  和  $t_k$  测量得到的载波相位增量可通过下式计算：

$$\delta\varphi_{GNSS}^j = \nabla\Delta\tilde{\varphi}^j(t_k) - \nabla\Delta\tilde{\varphi}^j(t_{k-1}) \quad (4.15)$$

式中  $\tilde{\varphi}$  为以周为单位的载波相位测量值。将式(4.15)与(4.14)作差后可得周跳探测的决策量（Detection Term, DT）为：

$$DT^j = \delta\varphi_{GNSS}^j - \delta\varphi_{INS}^j \quad (4.16)$$

周跳探测决策量 DT 的阈值可根据 INS 递推的载波相位增量的统计特性确定，也可以使用经验值。本文的周跳探测决策量阈值通过下式计算求出：

$$\delta\varphi^j = \gamma \sqrt{\mathbf{e}_j^T \mathbf{P}_{\delta v} \mathbf{e}_j} \cdot (t_k - t_{k-1}) \quad (4.17)$$

其中， $\gamma$  为根据经验选择的比例因子； $\mathbf{e}_j$  为从接收机位置到第  $j$  颗卫星位置的单位视线向量（Light-of-Sight, LOS）； $\mathbf{P}_{\delta v}$  为组合系统滤波器协方差矩阵中速度误差对应的协方差子块矩阵。

由于载波相位观测值的测量精度可达到 2 mm，而双差残余的电离层和对流层误差在短时间间隔内变化很小，历元间求差后可消去，因此周跳探测决策量 DT 的误差将主要由惯导递推的载波相位增量  $\delta\varphi_{INS}^j$  决定。将式(4.14)中的双差距离项展开后可得：

$$\delta\varphi_{INS}^j = \frac{1}{\lambda} \left( \left( \rho_r^j(t_k) - \rho_r^j(t_{k-1}) \right) - \left( \rho_r^i(t_k) - \rho_r^i(t_{k-1}) \right) + O(\nabla\Delta\rho_b(t_k, t_{k-1})) \right) \quad (4.18)$$

18)

其中，上标*i*和*j*分别表示参考卫星和非参考卫星；下标*r*表示流动站接收机； $\rho_r^j$ 是流动站接收机与第*j*颗卫星的几何距离； $O(\nabla\Delta\rho_b(t_k, t_{k-1}))$ 为与基准站接收机相关的可忽略的误差项。

为了分析(4.18)式的误差影响因素，只需要考察流动站接收机在相邻历元到卫星*i*或者*j*的距离差即可。以卫星*j*为例，流动站接收机在相邻历元到卫星*j*的距离差可表示为：

$$\begin{aligned} \delta\rho_r^j &= \rho_r^j(t_k) - \rho_r^j(t_{k-1}) \\ &= \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r}_k - \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{r}_{k-1} \\ &= \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{r}_{k-1} - d\mathbf{X}_r + d\mathbf{X}^j) - \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{r}_{k-1} \\ &= (\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k-1}) \cdot \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{e}_k \cdot (d\mathbf{X}^j - d\mathbf{X}_r) \end{aligned} \quad (4.19)$$

式中， $\mathbf{e}_k$ 和 $\mathbf{e}_{k-1}$ 分别为流动站接收机在历元 $t_k$ 和 $t_{k-1}$ 时对卫星的单位视线向量； $\mathbf{r}_k$ 和 $\mathbf{r}_{k-1}$ 分别为这两个历元流动站接收机到卫星的位置矢量； $d\mathbf{X}_r$ 和 $d\mathbf{X}^j$ 分别为接收机和卫星从 $t_{k-1}$ 到 $t_k$ 的位置增量矢量。

从式(4.19)可以看出，由于 $\|\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k-1}\|$ 的量级很小，所以即使 $\mathbf{r}_{k-1}$ 的误差达到 100 m，对上述距离差的影响也可忽略。考虑到卫星位置误差可通过差分消除，上述距离差的误差主要由惯导推算的位置增量引起而不是接收机的绝对位置误差。因此，数米的位置偏差将不会影响上述周跳探测方法，也就是说上述周跳探测算法在组合导航系统的位置状态有偏时仍然可进行周跳探测。

## 4.5 实验分析与验证

### 4.5.1 车载测试描述

为了验证上述提出的算法的有效性及其性能，2015年5月在武汉市郊区开展了动态车载测试，测试时长约为1小时，其轨迹如图4.1所示。NovAtel公司的SPAN-CPT系统和Trimble接收机分别用于采集IMU数据和GPS+BDS双频观测数据，其采样率分别为100 Hz和1 Hz。组合系统SPAN-CPT中内置IMU的性能参数如表4.1所示。考虑到单频单GNSS系统（GPS或者BDS）的单历元模糊度固定率较低，此处采用单频GPS+BDS数据对算法进行验证，而双频GPS+BDS数据则用于生成参考结果包括轨迹和整周模糊度。实验中流动站和基准站的距离小于2 km，因此，双差电离层和双差对流层误差均可忽略。

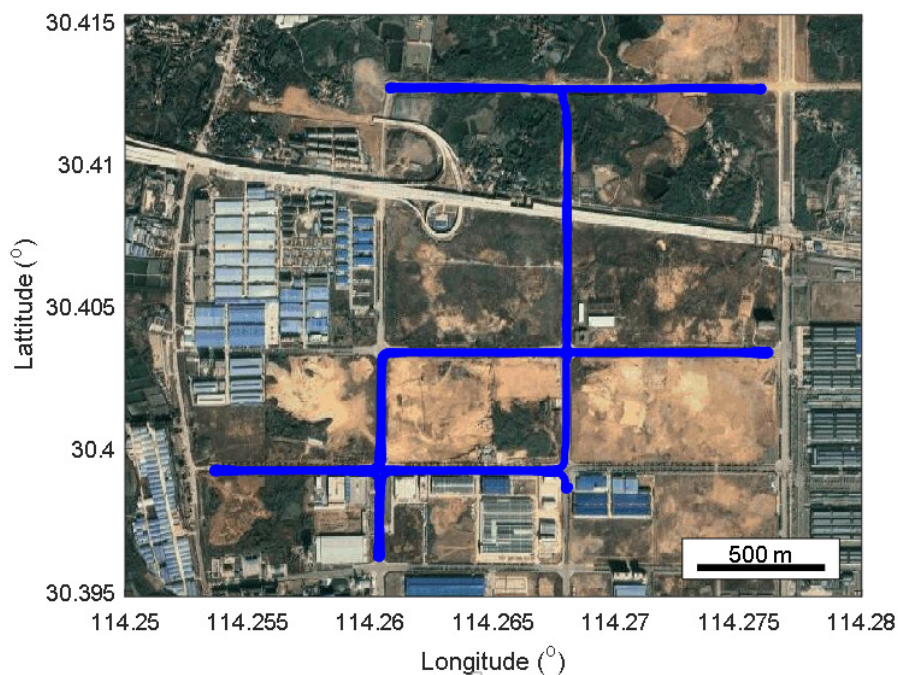


图 4.1 车载测试轨迹

表 4.1 SPAN-CPT 系统中 IMU 的性能参数

零偏常值		零偏重复性		比例因子		随机游走	
陀螺 ( $^{\circ}/h$ )	加表 (mGal)	陀螺 ( $^{\circ}/h$ )	加表 (mGal)	陀螺 (ppm)	加表 (ppm)	角度 ( $^{\circ}/\sqrt{h}$ )	速度 ( $m/s/\sqrt{h}$ )
20	50000	3	750	1500	4000	0.0667	0.10

图 4.2 给出了车载测试中可用的 GPS 和 BDS 卫星数及其 PDOP 值，从中可以看出卫星观测条件良好，GPS、BDS 和 GPS+BDS 系统的平均观测卫星数分别为 7.7、11.4 和 19.1，相对应的 PDOP 平均值分别为 2.13、2.28 和 1.42。相比于独立的 GPS 和 BDS，GPS+BDS 组合系统的 PDOP 值分别提升了 33.3%和 37.7%。从图中还可看出 188,000 s 后 GPS 的 PDOP 要优于 GPS，虽然 BDS 的可见卫星数要大于 GPS，这是由于北斗 GEO 和 IGSO 卫星的特殊空间分布引起的。

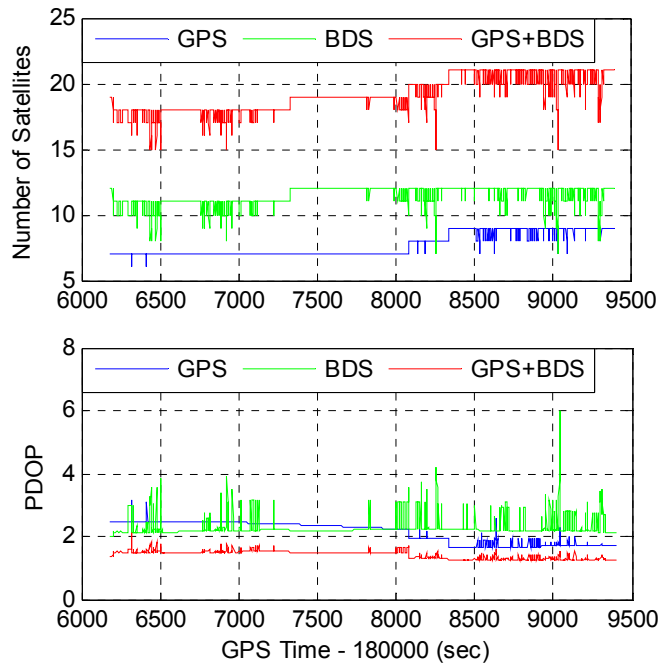


图 4.2 GPS、BDS 和 GPS+BDS 的可见卫星数及其对应的 PDOP 值 (15°截止高度角)

#### 4.5.2 INS 预测的相位增量辅助周跳探测性能分析

为了验证 INS 位置增量辅助模糊度固定算法模型的可行性，惯导辅助探测小周跳的能力至关重要，下面对 INS 递推的相位增量辅助周跳探测算法的性能进行分析。图 4.3 给出了所有 GPS 卫星和北斗卫星的周跳探测决策量序列（原始的载波相位观测值）。从中可以看出，原始数据中存在较多的小周跳，特别是北斗卫星；INS 预测的相位增量对小周跳具有较强的敏感性，在没有周跳发生时，周跳探测决策量在 0.5 周以内。

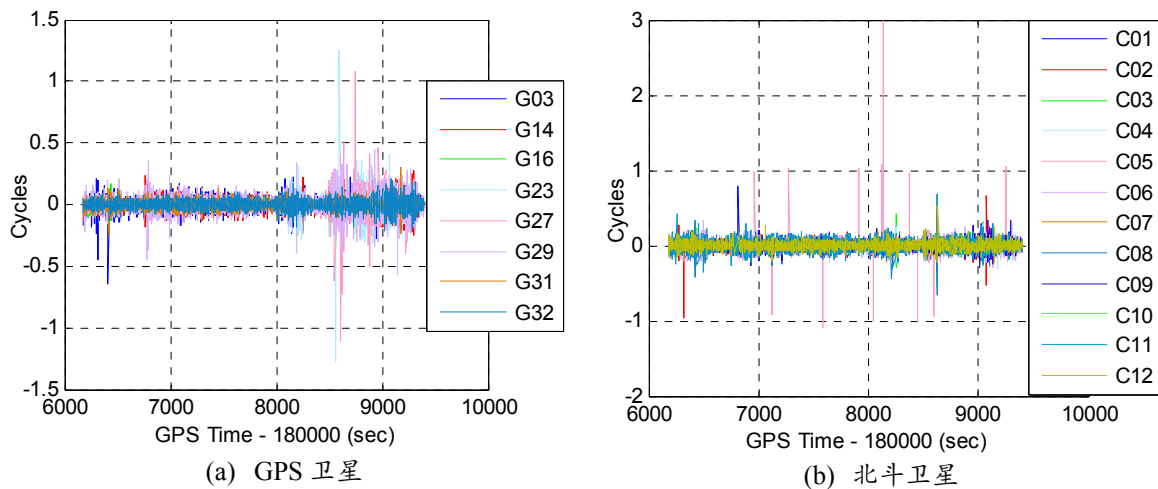


图 4.3 周跳探测决策量序列

为了进一步验证周跳探测算法的探测能力，在同一个历元多颗卫星上模拟了 1 周的小周跳。如图 4.4 所示，分别在 10 个历元 6 颗不同的卫星（三颗 GPS 卫星和 3 颗北斗卫星）上分别模拟了一周的周跳且所有周跳都发生在载体机动的情况下，图中红色线为周跳探测决策量阈值。从图中可以看出，所有模拟的周跳均可被正确探测出来，而且模拟的周跳和图 4.3 中原始数据的周跳对应的周跳探测决策量幅值基本一致，均在 1 周附近。对于独立的 GNSS 系统，小周跳的探测还存在较大挑战，特别是在动态环境下。显然，惯导辅助探测小周跳的能力将有效提高 INS 相对增量辅助模糊度固定算法的实用性和可靠性。

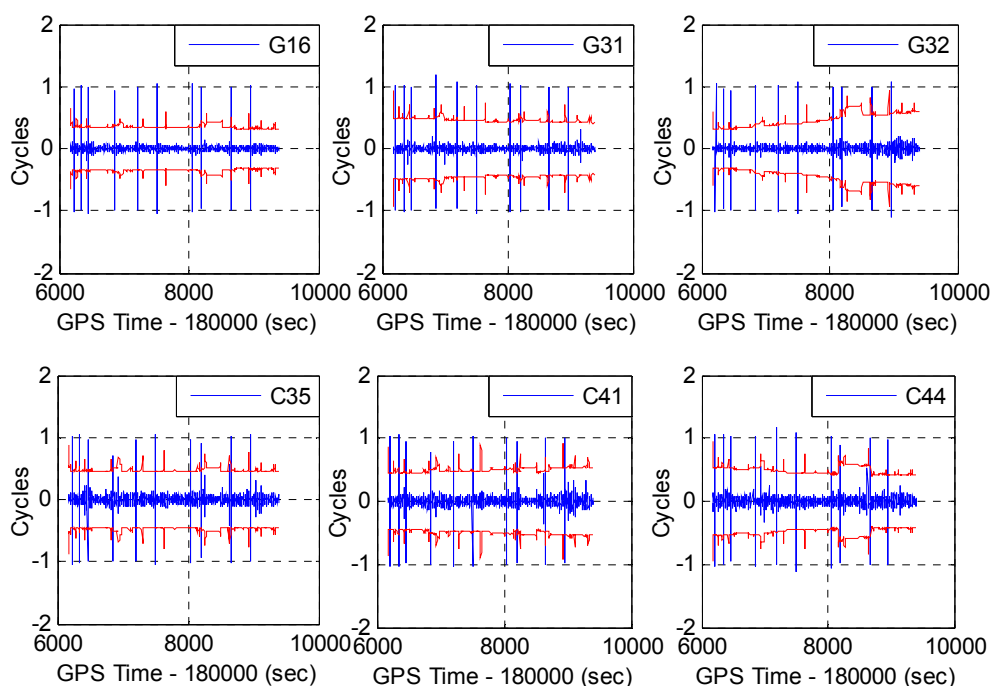


图 4.4 模拟 6 颗不同的卫星（三颗 GPS 卫星，三颗北斗卫星）在 10 个不同的历元同时发生周跳（红色线为周跳探测决策量阈值）

### 4.5.3 INS 相对位置增量特点分析

当 RTK/INS 紧组合模糊度固定错误时，组合系统的位置状态会出现明显偏差，而速度和姿态则主要取决于惯导本身，能维持很高的精度和可靠性。一旦系统的位置出现分米级的偏差，传统的绝对位置辅助模糊度固定方法将阻碍模糊度的正确固定。利用惯导相对位置增量辅助模糊度固定则需要考察惯导给出的相对位置增量的特点和精度，这将决定其能否有效用于模糊度解算。

为了分析组合系统在系统状态有偏时 INS 相对位置增量的特点并评估其精度，在历

元 186,804 s 引入了一周的模糊度偏差到 G29 卫星上。图 4.5 给出了 RTK/INS 紧组合在正常状态和有偏状态下的位置与参考值的差异以及相对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异。从图中可以看出, INS 相对位置增量在组合系统有偏状态下能获得和正常系统状态下相当的精度。同时, 当组合导航系统处于恒定的位置偏差时 (187,000 到 188,000 期间), INS 相对位置增量的精度和正常系统状态下的精度基本一致。上述结果表明, 在紧组合模糊度固定 (即使错误固定) 的情况下, INS 相对位置增量测量值可达到几厘米的精度。

在使用 INS 绝对位置约束辅助模糊度固定的传统 RTK/INS 紧组合方案中, 由于惯导的短期高精度约束, 含有偏差的模糊度将使组合导航系统始终含有位置偏差。目前, 对于这种由 1 周或几周模糊度偏差导致的系统位置偏差问题, 还没有较好地处理方法和对策, 本章提出的 INS 相对位置增量辅助模糊度固定算法则是一种有效的解决方案。同时, 该方法也可用于对传统 RTK/INS 紧组合的模糊度固定偏差进行监测。

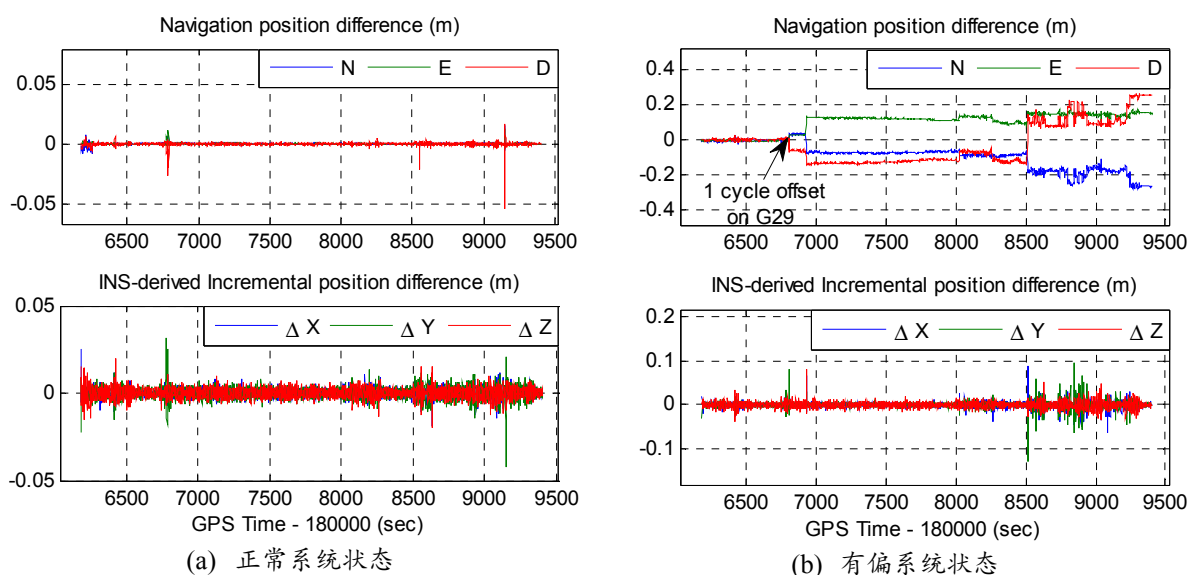


图 4.5 RTK/INS 紧组合在正常系统状态和有偏系统状态下的位置与参考值的差异以及相对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异 (在历元 186,804 处引入了 1 周模糊度偏差到 G29 卫星)

在 RTK/INS 紧组合模糊度固定 (包括错误固定) 的情况下, INS 递推的相对位置增量测量精度可达厘米级, 而浮点模糊度对应的精度则有所下降。由于浮点模糊度的精度主要由伪距和收敛时间决定, 因此本文评估了在只使用伪距观测值时 INS 递推的相对位置增量的精度。图 4.6 给出了基于伪距的 GPS/BDS RTK/INS 紧组合位置与参考值的差异以及相对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异。从图中可以看出, 最大的位置误差在北、东、地三个方向上均优于 2 m, 其对应的惯导递推的位置增量误差在三个坐标分量上小于 0.2 m, 该结果表明: RTK/INS 紧组合在卫星观测良好的条件下, 惯导递推



的位置增量的测量精度在三个坐标分量上优于 0.2 m。

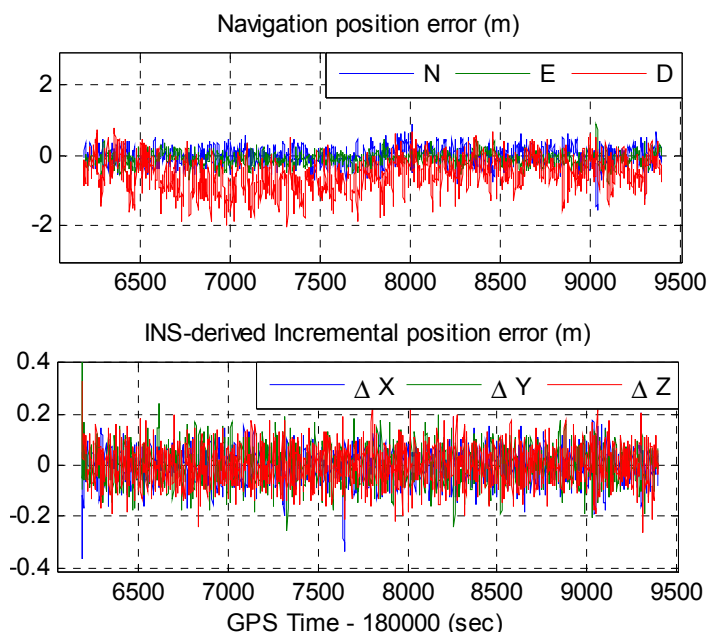


图 4.6 基于伪距的 GPS/BDS/INS 紧组合位置与参考值的差异以及相对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异

表 4.2 给出了正常状态和有偏状态下的 RTK/INS 紧组合以及基于伪距的 DGNSS/INS 紧组合对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异统计。从表中可以看出，正常状态和有偏状态的 RTK/INS 紧组合得到的位置增量 RMS 在三个方向上均小于 1 cm，基于伪距的 DGNSS/INS 紧组合在三个方向上的 RMS 分别为 5.56、6.38 和 6.80 cm。此外，正常状态和有偏状态的 RTK/INS 紧组合位置增量均值接近于 0，这也是用作辅助模糊度固定的高精度位置增量测量值的一个良好属性。

表 4.2 正常状态和有偏状态下的 RTK/INS 紧组合以及基于伪距的 DGNSS/INS 紧组合对应的惯导递推的位置增量与参考值的差异统计结果

Unit (cm)	RTK/INS (Normal)		RTK/INS (Biased)		DGNSS/INS	
	Mean	RMS	Mean	RMS	Mean	RMS
$\Delta X$	0.00	0.25	0.01	0.70	-0.15	5.56
$\Delta Y$	-0.01	0.34	-0.01	0.88	-0.00	6.38
$\Delta Z$	-0.01	0.30	0.00	0.74	0.09	6.80

为了更好地利用惯导递推的位置增量测量值辅助模糊度固定，需要合理地确定其方差，也即精度。图 4.7 给出了惯导递推的位置增量与参考值的差异及其对应的标准差（红

色曲线), 位置增量和标准差通过使用基于惯导递推的位置增量辅助模糊度解算方案的 RTK/INS 紧组合解算得到, 其中标准差的计算采用公式(4.12)。从图中可以看出, 根据组合导航滤波器中的速度误差计算出的位置增量误差可以用于描述惯导相对位置增量的测量精度, 当 RTK/INS 紧组合的模糊度固定时, 位置增量的标准差明显小于使用伪距进行滤波更新时的标准差, 而且伪距更新对应的标准差和图 4.6 给出的位置增量误差的幅值吻合。

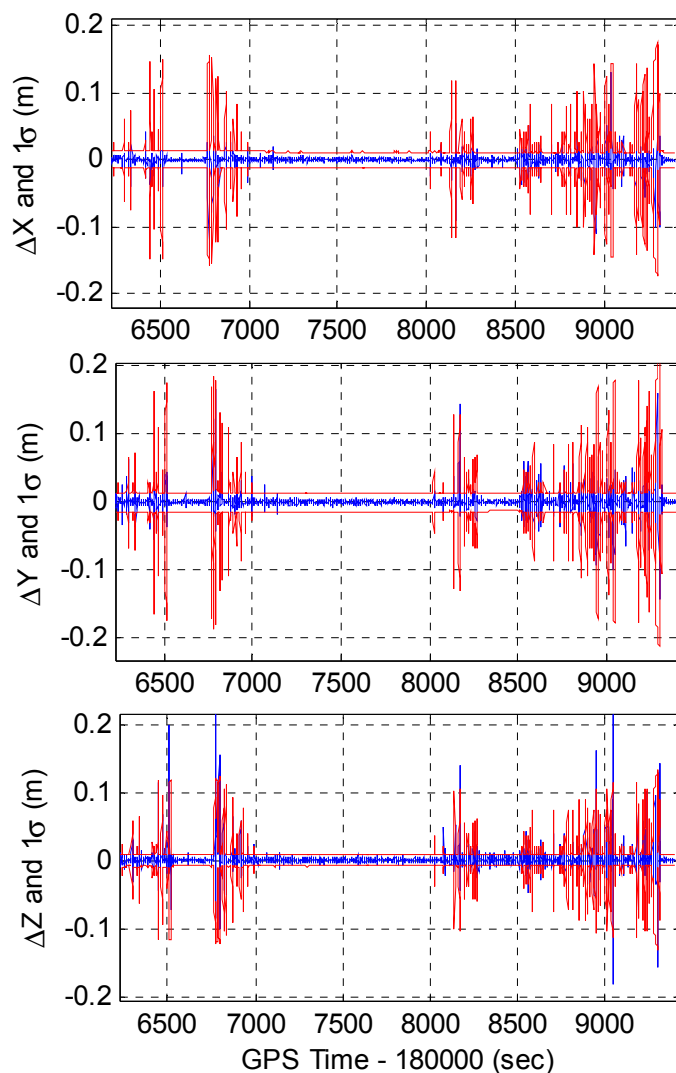


图 4.7 惯导递推的位置增量与参考值的差异(蓝色曲线) 及其对应的标准差(红色曲线)

#### 4.5.4 INS 相对位置约束辅助模糊度固定性能分析

为了评估基于惯导递推的位置增量辅助模糊度固定算法的性能, 下面也分别给出使用惯导预测的绝对位置辅助模糊度固定和无外加约束的模糊度固定结果。首先对比分析

了以上三种方案的模糊度精度因子 ADOP 值, ADOP 是一种用来度量模糊度解算模型强度的标量(Teunissen and Odijk, 1997), 其定义如下:

$$ADOP = \sqrt[n]{|Q_{\hat{a}\hat{a}}|} \text{ (cycles)} \quad (4.20)$$

其中,  $n$ 为模糊度矢量的维数;  $Q_{\hat{a}\hat{a}}$ 为模糊度协方差矩阵的行列式。

由于 ADOP 是模糊度搜索空间的一种度量, 因此 ADOP 值越小表明模糊度成功固定的可能性和可靠性就越高。图 4.8 (a) 给出了三种不同的模糊度固定方案的单历元 ADOP 值序列, 其中使用位置增量的相对约束方案使用了两个历元的观测数据。在使用惯导预测的绝对位置辅助模糊度固定的方案中, 三轴位置观测量的标准差均设为 0.1 m。从图 4.8 (a)中可以看出, 使用相对约束的模糊度固定方案的 ADOP 值稍微优于绝对约束模糊度固定方案, 且二者都明显优于不加外部约束的模糊度固定方案。由于上述三种方案的 ADOP 值均小于 0.12 周 (对应于 0.999 的模糊度固定成功率), 所以上述三种方案理论上可以获得相当的模糊度固定性能, 实际测试结果中模糊度固定率分别为 88.11%、86.34%和 86.65%。

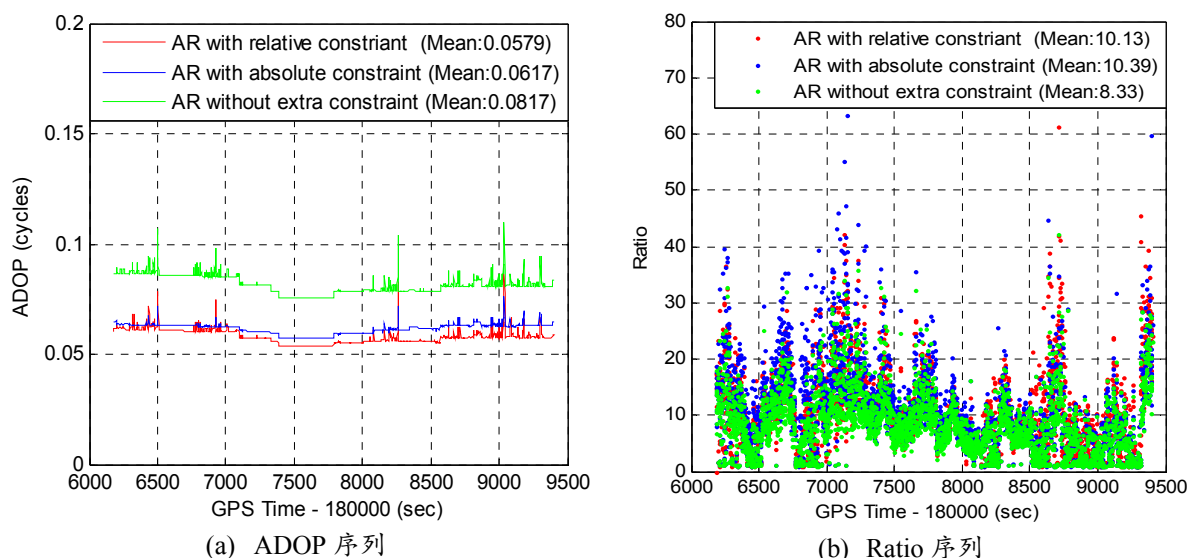


图 4.8 三种不同方案的单历元 ADOP 和 Ratio 值序列 (惯导相对约束的 AR 方案使用了两个历元的数据)

除了使用 ADOP 指标评估模糊度固定性能, ratio 测试统计量也可用于表征模糊度固定的可能性高低(Lee et al., 2005), ratio 值越大表明正确固定模糊度的可能性越高。图 4.8 (b) 给出了三种不同的模糊度固定方案的单历元 ratio 值序列。可以看出, 相对于不使用额外约束的模糊度固定方案, 基于位置增量的相对约束方案和使用绝对位置约束的方案能得到更大的 ratio 值。统计结果表明, 三种方案对应的平均 ratio 值分别为 10.13、10.39 和 8.33。从上述结果可以看出, 对于开阔环境下的单频 GPS+BDS 组合数据, INS

对模糊度辅助的作用有限（即使是传统的绝对位置约束辅助），因此多系统 RTK/INS 紧组合的可靠性问题显得更加突出和重要，特别是在多频多系统自身模糊度解算模型强度已足够强的情况下。在实践中，如果 GNSS 自身的模糊度解算模型强度较差时，可以增加滑动窗口的大小从而利用更多历元的观测数据来批处理解算模糊度参数。

## 4.6 本章小结

模糊度固定的可靠性是高精度定位应用的一项关键的指标。本章提出的一种基于 INS 位置增量辅助模糊度固定的方法可以有效避免传统 INS 绝对约束辅助模糊度固定方法的缺陷。

本章首先根据 IMU 预积分理论给出了 INS 相对位置增量测量值的计算公式并对其特点进行了分析，指出 INS 相对位置增量只需通过 IMU 观测值以及载体初始速度和姿态即可计算出来，而不需要中间状态的绝对导航参数；然后，阐述了 INS 相对位置测量值辅助模糊度解算原理，从公式的角度说明了 INS 相对位置约束辅助模糊度固定的本质为 INS 将动态定位转化为准静态定位。同时，为了使得该方法能有效用于模糊度固定，提出了一种 INS 相对位置增量辅助周跳探测的方法，该方法在 INS 的绝对位置有数米偏差时仍能有效探测周跳。

最后，通过一组车载实验数据对所提出的算法的有效性和性能进行了验证和评估。实验结果表明，INS 相位位置增量辅助周跳探测方法可以有效探测 1 周的小周跳（数据间隔为 1 s），因此实际中可以利用多个历元的 GNSS 观测数据来提高模糊度固定成功率和可靠性。同时，实验结果也证实了在 RTK/INS 紧组合绝对位置有偏的情况下 INS 仍能提供高精度的相对位置测量值。对于开阔环境下的单频 GPS+BDS 数据，INS 相对位置约束辅助的模糊度解算模型能获得与传统 INS 绝对位置约束辅助的模糊度解算模型相当的模糊度固定性能。此外，为了进一步提高新方法的模糊度固定率，还可利用 INS 的信息对周跳进行修复，从而减少未知模糊度参数的个数。

## 5 单频多模 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型

### 5.1 引言

如论文第三章所述,基于 MEMS-IMU 的 RTK/INS 紧组合在 GNSS 信号中断期间位置误差漂移将迅速增大,为了进一步增强 RTK/INS 紧组合在复杂 GNSS 观测环境下的导航性能,本章将引入视觉辅助信息并构建相应的紧组合算法。利用相机提供的序列影像进行导航通常有两种方式,一种为利用影像中提取的具有绝对位置信息的已知特征点(控制点)来提供绝对定位,另一种则为利用影像中提取的未知特征点在序列影像中的约束关系来提供相对定位(王力, 2015)。基于已知特征点的绝对定位方式同 GNSS 定位一样可以提供无误差积累的高精度位置和姿态参数,但是需要事先在导航区域布设具有已知位置信息的路标或在高精度地图采集过程中识别若干路标(如交通指示牌),因此对人力、物力成本要求较高。相较而言,利用未知环境中的自然特征点在序列影像中的约束关系进行相对定位则是一种更为廉价、高效且自主的方式,但是其定位误差会逐渐积累。本章将对这两种具有不同特点的视觉定位方法进行详细讨论,并通过合理地建模将其融入到 RTK/INS 紧组合滤波模型中。

本章具体内容安排如下:5.2 节和 5.3 节分别详细推导了基于已知特征点的视觉/INS 紧组合滤波模型和基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波模型,包括各自的状态模型和观测模型的建立,并给出多状态约束滤波模型与最小二乘估计等价性的证明;5.4 节统一了 RTK/INS 紧组合滤波模型与视觉/INS 紧组合滤波模型;5.5 节通过仿真实验对基于已知特征点的和基于多状态约束的两种视觉/INS 紧组合滤波模型进行了验证和分析;5.6 节对本章内容进行小结。

### 5.2 基于已知特征点的绝对定位滤波模型

在一些 GNSS 信号被严重遮挡的区域(如高架桥下),可以事先对区域进行测绘并给出一些容易识别的标志(如二维码等)在导航坐标系下的绝对位置坐标(称为已知特征点或控制点),当移动载体进入该区域后可以先对这些标志进行识别和匹配,然后利用这些有绝对坐标信息的特征点辅助定位定姿。基于已知特征点的视觉辅助惯性导航,是影像作为一种绝对定位信息源对惯导进行辅助,因此可以估计出载体在导航坐标系下的绝对位姿,下面对其模型进行推导。

#### 5.2.1 状态模型

为了建立统一的 GNSS/INS/视觉紧组合模型,系统状态模型同 GNSS/INS 组合导航

建模一致，包括 2.5.3 节介绍的 ECEF 坐标系下的惯导误差模型以及 IMU 传感器的零偏误差模型，如下：

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \delta \mathbf{v}_{eb}^e \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{R}_b^e \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi}_{be}^e + \mathbf{R}_b^e \delta \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \delta \mathbf{g}^e \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{be}^e = -\mathbf{R}_b^e \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times) \boldsymbol{\phi}_{be}^e \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{b}}_g \\ \delta \dot{\mathbf{b}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_{bg}} \delta \mathbf{b}_g \\ -\frac{1}{\tau_{ba}} \delta \mathbf{b}_a \end{bmatrix} + \mathbf{w} \quad (5.2)$$

其中， $\delta \mathbf{b}_g$  和  $\delta \mathbf{b}_a$  分别 IMU 的陀螺和加表零偏误差； $\tau_{bg}$ 、 $\tau_{ba}$  分别为对应的一阶高斯-马尔科夫过程的相关时间。综合以上两式可得系统误差状态向量为：

$$\delta \mathbf{x}_{IMU} = [(\delta \mathbf{r}_{eb}^e)^T \quad (\delta \mathbf{v}_{eb}^e)^T \quad (\boldsymbol{\phi}_{be}^e)^T \quad \delta \mathbf{b}_a^T \quad \delta \mathbf{b}_g^T]^T \quad (5.3)$$

## 5.2.2 观测模型

在一帧图像中一般可以观测到多个具有已知坐标的特征点，而对每个特征点其观测模型均相同，下面以一个特征点为例进行推导。设特征点  $f_j$  在  $G$  系（地心地固坐标系，即  $e$  系）下的三维空间坐标为  $\mathbf{p}_{f_j}^G$ ，则该特征点在相机坐标系  $\{C_i\}$  下的坐标可表示为：

$$\hat{\mathbf{p}}_{f_j}^{C_i} = \mathbf{R}_B^C \hat{\mathbf{R}}_G^{B_i} (\mathbf{p}_{f_j}^G - \hat{\mathbf{p}}_{B_i}^G) + \mathbf{p}_B^C \quad (5.4)$$

其中， $\hat{\mathbf{p}}_{B_i}^G$  和  $\hat{\mathbf{R}}_G^{B_i}$  分别为惯导机械编排解算得到的 IMU 的位置向量和姿态矩阵； $\mathbf{R}_B^C$  和  $\mathbf{p}_B^C$  分别为相机与惯导之间的相对旋转和平移参数，可通过标定精确求得。因此，根据针孔相机的投影方程式(2.62)可得该特征点在图像中的像素坐标估计值为：

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_j^{C_i} / \hat{Z}_j^{C_i} \\ \hat{Y}_j^{C_i} / \hat{Z}_j^{C_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

其中， $(\hat{X}_j^{C_i} \quad \hat{Y}_j^{C_i} \quad \hat{Z}_j^{C_i})^T$  为特征点  $f_j$  在相机坐标系  $\{C_i\}$  下的三维坐标  $\hat{\mathbf{p}}_{f_j}^{C_i}$ ；此外，可将该特征点在像平面坐标系内的像素坐标  $(\tilde{u}, \tilde{v})^T$  作为测量值，并与上述估计出来的像素坐标值求差，即可得到卡尔曼滤波观测量  $\mathbf{r}_i^{(j)}$  为：

$$\mathbf{r}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_i^{(j)} \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_i^{(j)} \quad (5.6)$$

其中， $\mathbf{n}_i^{(j)}$  为图像坐标的测量噪声，以像素为单位； $\mathbf{H}_i^{(j)}$  为滤波观测量对状态向量的雅克比矩阵，可通过对式(5.4)进行扰动分析得到：

$$\mathbf{H}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_i^{(j)} \mathbf{R}_B^C \widehat{\mathbf{R}}_G^{B_i} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & -\mathbf{J}_i^{(j)} \mathbf{R}_B^C \widehat{\mathbf{R}}_G^{B_i} \left[ (\mathbf{p}_{f_j}^G - \widehat{\mathbf{p}}_{B_i}^G) \times \right] & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

其中,  $\mathbf{J}_i^{(j)}$  为滤波观测对特征点坐标的雅克比矩阵, 可写为:

$$\mathbf{J}_i^{(j)} = \left( 1 / (\hat{Z}_j^{C_i})^2 \right) \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Z}_j^{C_i} & 0 & -\hat{X}_j^{C_i} \\ 0 & \hat{Z}_j^{C_i} & -\hat{Y}_j^{C_i} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

式(5.4)的误差扰动可表示为:

$$\mathbf{p}_{f_j}^{C_i} + \delta \mathbf{p}_{f_j}^{C_i} \approx \mathbf{R}_B^C \mathbf{R}_G^{B_i} (\mathbf{I} + [\boldsymbol{\phi}_{B_i G}^G \times]) (\mathbf{p}_{f_j}^G - \mathbf{p}_{B_i}^G - \delta \mathbf{p}_{B_i}^G) + \mathbf{p}_B^C \quad (5.9)$$

化简后可得特征点坐标的误差关于系统状态中位置和姿态误差的表达式:

$$\delta \mathbf{p}_{f_j}^{C_i} \approx -\mathbf{R}_B^C \mathbf{R}_G^{B_i} \delta \mathbf{p}_{B_i}^G - \mathbf{R}_B^C \mathbf{R}_G^{B_i} \left[ (\mathbf{p}_{f_j}^G - \mathbf{p}_{B_i}^G) \times \right] \boldsymbol{\phi}_{B_i G}^G \quad (5.10)$$

综合公式(5.8)和(5.10)并使用矩阵微分链式法则即可得到(5.7)式的雅克比矩阵。

### 5.3 基于多状态约束的相对定位滤波模型

基于多状态约束的卡尔曼滤波 (Multi-State Constraint Kalman Filter, MSCKF) 方法是一种利用未知环境中提取的特征点进行高精度位姿估计的视觉/INS 紧组合方法 (Mourikis and Roumeliotis, 2007), 该方法充分地利用了连续跟踪到的特征点在多张影像间形成的约束关系, 而且在状态估计精度和计算量方面优于 EKF-SLAM 和基于滑动窗口的迭代最小化方法 (Li and Mourikis, 2013)。MSCKF 的本质思想为将同一个被连续多帧影像跟踪到的静止特征点的观测转化为多张影像之间的几何约束 (图 5.1), 该几何约束关系可以通过构建一个特殊的量测模型来实现, 本节将对其进行详细推导。

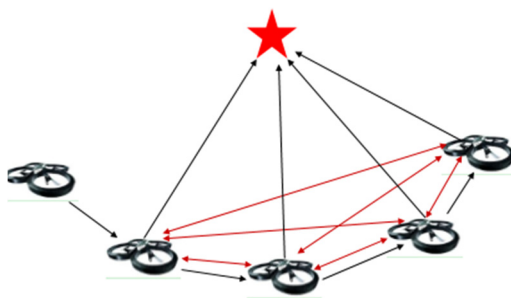


图 5.1 序列影像之间形成的几何约束关系

#### 5.3.1 状态模型

与基于 EKF 的 SLAM 方法将三维特征点加入到滤波状态向量中不同, MSCKF 以滑动窗口的形式将一些图像帧对应的相机位姿增广到状态向量中, 这也是多状态约束概

念的来源。因此，基于多状态约束的滤波模型的状态向量包含两部分误差向量，分别为与 IMU 相关的误差状态和与相机（或者与相机固联的 IMU）位置、姿态相关的误差状态，如下：

$$\delta \mathbf{x}_k = [\delta \mathbf{x}_{IMU}^T \quad \boldsymbol{\phi}_1^T \quad \delta \mathbf{r}_1^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_K^T \quad \delta \mathbf{r}_K^T] \quad (5.11)$$

$$\delta \mathbf{x}_{IMU} = [(\delta \mathbf{r}_{eb}^b)^T \quad (\delta \mathbf{v}_{eb}^b)^T \quad (\boldsymbol{\phi}_{be}^e)^T \quad \delta \mathbf{b}_a^T \quad \delta \mathbf{b}_g^T]^T \quad (5.12)$$

其中， $\boldsymbol{\phi}_i^T$  和  $\delta \mathbf{r}_i^T$ ， $i = 1 \cdots K$  为滑动窗口中第  $i$  个与相机固联的 IMU 对应的姿态和位置误差矢量； $K$  为滑动窗口中 IMU 位姿的个数。由于与每张影像对应的 IMU 位置、姿态是不随时间变化的，所以其对应的误差状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\phi}}_i = \mathbf{0} \\ \dot{\delta \mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.13)$$

综合上式和 IMU 误差状态方程式(5.1)、(5.2)可得多状态约束滤波模型的误差状态方程：

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}}_{IMU} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_i \\ \dot{\delta \mathbf{r}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{IMU} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_i \\ \delta \mathbf{r}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

当一帧新影像被记录时，将该影像对应的 IMU 位置、姿态误差增广到误差状态方程中，同时增广对应的方差协方差矩阵：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15+6K} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{P}_k \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15+6K} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{P}_k \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} \mathbf{P}_k & \mathbf{J} \mathbf{P}_k \mathbf{J}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

其中， $\mathbf{P}_k$  和  $\mathbf{P}_{k+1}$  分别为增广前和增广后的误差状态方差协方差矩阵； $\mathbf{J}$  为雅克比矩阵，其表达式为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6K} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6K} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

由于状态向量中保持的是与相机固联的 IMU 位置、姿态误差，因此位置和姿态对应的雅克比矩阵均为单位矩阵，其余雅克比矩阵均为零矩阵。

滑动窗口中维持的相机位姿个数  $K$  的大小一般应该与影像中大部分特征点被连续跟踪的次数接近，这样就可以充分利用特征点与多帧影像之间形成的几何约束关系，从而提高状态估计精度。在实际应用中，还可以根据设备对计算量的要求来确定滑动窗口的大小，以损失部分精度来获取更高的计算效率。随着新的影像不断被记录，滑动窗口中的位姿个数将不断增加，当达到最大值时就需要合理地删除部分影像对应的位姿状态。由于滑动窗口中最初的影像带有更多有价值的定位信息，因此实际中应该对其保留，而从倒数第二个影像对应的位姿状态开始删除(Mourikis and Roumeliotis, 2007)。



### 5.3.2 观测模型

MSCKF 观测模型的构建以同一个特征点在多张连续影像中的所有观测量为基础，当连续被跟踪到的特征点从当前相机视野中消失时，该特征点在滑动窗口中对应的所有影像观测信息将被用于构建量测模型。同时，当滑动窗口中的相机位姿个数达到最大值时，被移除影像中的所有特征点将分别利用各自的观测值构建量测模型。

#### (1) 量测方程

考虑环境中的一个静止特征点 $f_j$ 被连续的 $M_j$ 帧影像跟踪，其在第 $i$ 张影像对应的相机坐标系 $C_i$ 下的三维坐标可表示为：

$$\hat{\mathbf{p}}_{f_j}^{C_i} = [\hat{X}_j^{C_i} \quad \hat{Y}_j^{C_i} \quad \hat{Z}_j^{C_i}]^T = \mathbf{R}_B^C \hat{\mathbf{R}}_G^{B_i} (\hat{\mathbf{p}}_{f_j}^G - \hat{\mathbf{p}}_{B_i}^G) + \mathbf{p}_B^C \quad (5.17)$$

其中， $\hat{\mathbf{p}}_{B_i}^G$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_G^{B_i}$ 分别为与相机记录第 $i$ 张影像相对应的 IMU 位置和姿态； $\hat{\mathbf{p}}_{f_j}^G$ 为特征点在 $G$ 系（地心地固坐标系，即 $e$ 系）下的三维位置坐标，可利用其在被跟踪的 $M_j$ 帧影像中的测量值通过 2.6.3 节介绍的三角化方法估计得到。该特征点在第 $C_i$ 帧图像中的像素坐标估计值可根据针孔相机的投影方程式(2.62)计算：

$$\hat{\mathbf{z}}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_j^{C_i} / \hat{Z}_j^{C_i} \\ \hat{Y}_j^{C_i} / \hat{Z}_j^{C_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

将影像中测量的像素坐标减去上述估计的像素坐标可得测量残差如下：

$$\mathbf{r}_i^{(j)} = \mathbf{z}_i^{(j)} - \hat{\mathbf{z}}_i^{(j)} \quad (5.19)$$

为了得到测量残差与系统状态的线性化关系，将上式线性化可得：

$$\mathbf{r}_i^{(j)} \approx \mathbf{H}_{X_i}^{(j)} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{f_i}^{(j)} \delta \mathbf{p}_{f_j}^G + \mathbf{n}_i^{(j)} \quad (5.20)$$

其中， $\mathbf{n}_i^{(j)}$ 为 $2 \times 1$ 图像测量噪声向量，其方差协方差矩阵为 $\mathbf{R}_i^{(j)} = \sigma^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}$ ； $\delta \mathbf{p}_{f_j}^G$ 为三角化估计出来的特征点坐标误差； $\mathbf{H}_{X_i}^{(j)}$ 和 $\mathbf{H}_{f_i}^{(j)}$ 分别为估计的像素测量值 $\hat{\mathbf{z}}_i^{(j)}$ 对系统状态量和特征点坐标的雅克比矩阵，可通过上节介绍的误差扰动分析获得，其表达式如下：

$$\mathbf{H}_{X_i}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 15} & \mathbf{0}_{2 \times 6} & \cdots & -\mathbf{J}_i^{(j)} \mathbf{R}_B^C \hat{\mathbf{R}}_G^{B_i} \left[ (\hat{\mathbf{p}}_{f_j}^G - \hat{\mathbf{p}}_{B_i}^G) \times \right] & -\mathbf{J}_i^{(j)} \mathbf{R}_B^C \hat{\mathbf{R}}_G^{B_i} & \cdots \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

21)

$$\mathbf{H}_{f_i}^{(j)} = \mathbf{J}_i^{(j)} \mathbf{R}_B^C \hat{\mathbf{R}}_G^{B_i} \quad (5.22)$$

式(5.21)中的特征点坐标为含有误差的估计值，这和上节介绍的基于已知特征点的雅克比矩阵公式(5.7)不同。

该特征点对应的每一帧图像均可构建出式(5. 20)的测量方程, 将该特征点对应的所有测量方程叠加可得:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{(j)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{(j)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}^{(j)}} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{(j)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{(j)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_X^{(j)}} \delta \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{f,1}^{(j)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{f,k}^{(j)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_f^{(j)}} \delta \mathbf{p}_{f_j}^G + \mathbf{n}^{(j)} \quad (5. 23)$$

其中,  $k$ 表示滑动窗口中第 $k$ 个相机位姿对应的索引位置。由于上式中含有特征点坐标误差项, 且其与系统误差状态量之间存在相关性(系统状态被用于估计特征点的坐标), 因此不满足卡尔曼滤波测量更新方程的要求。为了将特征点坐标误差项 $\delta \mathbf{p}_{f_j}^G$ 从上式中移除,

可对上式两边同时左乘矩阵 $\mathbf{H}_f^{(j)}$ 的左零空间矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_o^{(j)} = \mathbf{A}^T \mathbf{r}^{(j)} &= \mathbf{A}^T \mathbf{H}_X^{(j)} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{A}^T \mathbf{n}^{(j)} \\ &= \mathbf{H}_o^{(j)} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_o^{(j)} \end{aligned} \quad (5. 24)$$

其中,  $\mathbf{A}$ 为酉矩阵, 其列向量构成了 $\mathbf{H}_f^{(j)}$ 的左零空间矩阵的基。该式消除了特征点坐标误差项(也称为边缘化), 但保留了该特征点与多张影像之间存在的几何约束关系。由于 $\mathbf{H}_f^{(j)}$ 为 $2M_j \times 3$ 的列满秩矩阵, 所以 $\mathbf{r}_o^{(j)}$ 和 $\mathbf{n}_o^{(j)}$ 均为 $2M_j - 3$ 行的列向量,  $\mathbf{n}_o^{(j)}$ 的协方差矩阵为:

$$E(\mathbf{n}_o^{(j)} \mathbf{n}_o^{(j)T}) = \sigma^2 \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \sigma^2 \mathbf{I}_{(2M_j-3) \times (2M_j-3)} \quad (5. 25)$$

通过变换后, 式(5. 24)中的测量残差项与估计出的特征点坐标误差不再相关并且满足卡尔曼滤波量测方程的形式, 可用于滤波测量更新。

## (2) 粗差剔除

在使用特征点 $f_j$ 构建的量测方程(5. 24)进行滤波更新之前, 需要确定其是否是粗差点, 即误匹配特征点或者动态物体上提取的特征点。本文采用 $\chi^2$ 检测来识别粗差点, 如下:

$$\gamma_j = \left( \mathbf{r}_o^{(j)} \right)^T \left( \mathbf{H}_o^{(j)} \mathbf{P}_k \left( \mathbf{H}_o^{(j)} \right)^T + \sigma^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r}_o^{(j)} \quad (5. 26)$$

将 $\gamma_j$ 与自由度为 $2M_j - 3$ 的 $\chi^2$ 分布在置信度为 0.95 时对应的阈值进行比较, 如果 $\gamma_j$ 大于阈值, 则认为该特征点为粗差点。

## (3) 滤波更新

剔除粗差点后就可以将剩余的所有特征点对应的量测方程叠加用于滤波更新, 如下:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_o^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_o^{(L)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_o} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_o^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_o^{(L)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_X} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_o \quad (5.27)$$

其中,  $L$ 为用于滤波更新的特征点个数。由于特征点观测值在统计上是独立的, 所以 $\mathbf{n}_o$ 是不相关的噪声向量, 其协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_o = \sigma^2 \mathbf{I}_{d \times d} \quad (5.28)$$

其中,  $d$ 为残差向量 $\mathbf{r}_o$ 的维数, 其值为 $d = \sum_{j=1}^L (2M_j - 3)$ 。当一个历元有多个特征点需要更新且每个特征点被多帧影像跟踪到时, 式(5.27)的维数将变得很大, 从而增大了计算量。为了减小滤波更新的计算复杂度, 可对矩阵 $\mathbf{H}_X$ 进行QR分解(Mourikis and Roumeliotis, 2007):

$$\mathbf{H}_X = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

其中,  $\mathbf{Q}_1$ 和 $\mathbf{Q}_2$ 均为正交矩阵;  $\mathbf{T}_H$ 为上三角矩阵。将上式代入(5.27)并且等式两边同乘上 $[\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2]^T$ 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{r}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{n}_o \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{n}_o \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

上式中的 $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{r}_o$ 为噪声向量, 可直接舍去, 因此新的滤波量测方程为:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o = \mathbf{T}_H \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_n \quad (5.31)$$

其中,  $\mathbf{n}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{n}_o$ , 其协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{R}_o \mathbf{Q}_1 = \sigma^2 \mathbf{I}_{r \times r} \quad (5.32)$$

其中,  $r$ 为矩阵 $\mathbf{Q}_1$ 的列数。

最后, 利用(5.31)式的量测方程通过2.7.2节介绍的卡尔曼滤波公式可完成滤波更新, 如下:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{T}_H^T (\mathbf{T}_H \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{T}_H^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{T}_H) \mathbf{P}_{k,k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{T}_H)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_n \mathbf{K}_k^T \quad (5.34)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{K}_k \mathbf{r}_n \quad (5.35)$$

其中,  $\Delta \mathbf{X}$ 为当前系统状态估计的误差改正数向量。

### 5.3.3 最小二乘等价性的证明

在线性高斯系统中, MSCKF的状态方程和量测方程分别为

$$\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{z}_{ij} = \mathbf{H}_{X_{ij}} \mathbf{x}_i + \mathbf{H}_{f_{ij}} \mathbf{p}_{f_j} + \mathbf{n}_{ij} \quad (5.37)$$

其中,  $\mathbf{x}_i, i = 0, 1, \dots, N$ , 为 IMU 状态向量;  $\mathbf{p}_{f_j}, j = 1, 2, \dots, M$ , 为特征点的三维坐标;

$\Phi_i$  为状态转移矩阵,  $\mathbf{H}_{x_{i,j}}, \mathbf{H}_{f_{i,j}}$  分别为 IMU 状态向量和特征点坐标的雅克比矩阵;  $\mathbf{w}_i$  为

服从零均值的高斯白噪声过程;  $\mathbf{n}_{ij}$  为图像测量值的测量噪声向量, 其协方差矩阵为  $\sigma^2 \mathbf{I}_2$ 。

将所有待估的 IMU 状态向量写成矩阵向量的形式, 如下:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \cdots \Phi_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_0 \\ \Phi_2 \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \cdots \Phi_1 \mathbf{w}_0 + \cdots + \mathbf{w}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

同理, 将所有特征点坐标向量写成矩阵向量形式:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{f}_M^T]^T \quad (5.39)$$

此时, 包含所有 IMU 状态和特征点坐标的量测方程可写为:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}_x \mathbf{x} + \mathbf{H}_f \mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (5.40)$$

其中,  $\mathbf{H}_x$  和  $\mathbf{H}_f$  分别为块矩阵  $\mathbf{H}_{x_{i,j}}$  和  $\mathbf{H}_{f_{i,j}}$  的叠加。

假设系统状态的先验状态估值及其协方差矩阵分别为  $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0$ , 则根据式(5.38)并利用协方差传播定律可得状态向量  $\mathbf{x}$  的估值和协方差矩阵, 记为  $\hat{\mathbf{x}}_s, \mathbf{P}_s$ 。根据广义最小二乘原理, 可将状态向量的先验估值当作虚拟观测值:

$$\mathbf{n}_s = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_s \quad (5.41)$$

将上式与(5.40)式联立可得如下误差方程:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_s \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_x & \mathbf{H}_f \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}}_X - \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_s \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}}_L \quad (5.42)$$

上式的最小二乘解为:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{L} \quad (5.43)$$

其中,  $\mathbf{W}$  为权矩阵:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

将矩阵的具体表达式代入(5.43)可得 IMU 状态和特征点坐标的最小二乘解为:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{LS} \\ \hat{\mathbf{f}}_{LS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_x^T \mathbf{H}_x & \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_x^T \mathbf{H}_f \\ \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_f^T \mathbf{H}_x & \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_f^T \mathbf{H}_f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s^{-1} \hat{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_x^T \mathbf{z} \\ \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_f^T \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

采用分块矩阵求逆公式可得 IMU 状态向量的解及其协方差矩阵分别为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{LS} = \hat{\mathbf{P}}_{LS} \left( \mathbf{P}_s^{-1} \hat{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_x^T \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_f (\mathbf{H}_f^T \mathbf{H}_f)^{-1} \mathbf{H}_f^T \right) \mathbf{z} \right) \quad (5.46)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{LS} = \left( \mathbf{P}_s^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_X^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_f (\mathbf{H}_f^T \mathbf{H}_f)^{-1} \mathbf{H}_f^T) \mathbf{H}_X \right)^{-1} \quad (5.47)$$

在 MSCKF 滤波更新过程中, 为了消去式(5.40)中与特征点有关的项, 量测方程两边同时乘上系数矩阵  $\mathbf{H}_f$  的左零空间矩阵  $\mathbf{A}^T$ , 如下:

$$\underbrace{\mathbf{A}^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}_X \hat{\mathbf{x}}_s)}_{\mathbf{z}_0} = \mathbf{A}^T \mathbf{H}_X \tilde{\mathbf{x}}_s + \underbrace{\mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{n})}_{\mathbf{n}_0} \quad (5.48)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  为状态向量先验估值  $\hat{\mathbf{x}}_s$  的误差。根据离散 Kalman 滤波的更新公式(Maybeck, 1982), 可得 MSCKF 滤波估计得到的状态向量及其协方差矩阵为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{MSC} = \hat{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K} \mathbf{z}_0 \quad (5.49)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{MSC} = \left( \mathbf{P}_s^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{A}^T \mathbf{H}_X)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}_X) \right)^{-1} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{MSC} (\mathbf{A}^T \mathbf{H}_X)^T \quad (5.51)$$

由于矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_f (\mathbf{H}_f^T \mathbf{H}_f)^{-1} \mathbf{H}_f^T$  为矩阵  $\mathbf{H}_f$  左零空间的正交投影矩阵, 而  $\mathbf{A}^T$  为矩阵  $\mathbf{H}_f$  的左零空间矩阵, 因此二者满足如下关系(Meyer, 2000):

$$\mathbf{I} - \mathbf{H}_f (\mathbf{H}_f^T \mathbf{H}_f)^{-1} \mathbf{H}_f^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T \quad (5.52)$$

将上式代入(5.47)即可得到  $\hat{\mathbf{P}}_{MSC} = \hat{\mathbf{P}}_{LS}$ 。将(5.48)、(5.51)代入(5.49)后可得:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MSC} &= \hat{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{MSC} (\mathbf{A}^T \mathbf{H}_X)^T \mathbf{A}^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}_X \hat{\mathbf{x}}_s) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{MSC} \mathbf{H}_X^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T) (\mathbf{z} - \mathbf{H}_X \hat{\mathbf{x}}_s) \\ &= \hat{\mathbf{P}}_{MSC} \left( \left( \hat{\mathbf{P}}_{MSC}^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_X^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T) \mathbf{H}_X \right) \hat{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}_X^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T) \mathbf{z} \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

将式(5.50)代入上式, 并结合等式(5.52)即可得到  $\hat{\mathbf{x}}_{LS} = \hat{\mathbf{x}}_{MSC}$ 。因此, MSCKF 滤波估计与最小二乘估计具有等价性, 从最小二乘角度来看, MSCKF 给出的状态估计是一种最优估计。此外, 在等价性证明的过程中, 公式(5.52)起到了关键作用, 这也说明多状态约束滤波模型中左乘特征点坐标对应的系数矩阵的零空间具有合理性。

## 5.4 RTK/INS 与视觉/INS 紧组合模型的统一

根据第三章讨论的 RTK/INS 紧组合滤波模型和本章前几节讨论的视觉/INS 紧组合滤波模型, 本节将对两种滤波模型进行统一并实现 RTK/INS/视觉紧组合滤波算法模型。

### 5.4.1 状态模型

由于视觉/INS 紧组合滤波模型和 RTK/INS 紧组合滤波模型均使用了 ECEF 系下的 IMU 误差状态模型, 而基于多状态约束的视觉/INS 紧组合需要对 IMU 误差状态模型进

行增广且以滑动窗口的形式维持一定数目的相机位姿状态，因此 RTK/INS/视觉紧组合的误差状态模型与 5.3.1 节给出的多状态约束的视觉/INS 紧组合状态模型相同。

### 5.4.2 观测模型

由于 RTK/INS/视觉紧组合滤波的状态模型与基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波的状态模型一致，因此对应的观测模型也保持不变。对于基于已知特征点的视觉/INS 紧组合滤波量测模型与 RTK/INS 紧组合量测模型，则只需要考虑将原有的设计矩阵的列数增广至与状态向量的维数一致，矩阵增广的元素均设置为零即可。

### 5.4.3 算法框架

在 RTK/INS/视觉紧组合滤波建模中，INS 作为主导航系统并完成系统状态的时间更新，RTK 与视觉测量信息则分别以序贯的方式完成量测更新，其完整的算法框图如图 5.2 所示。

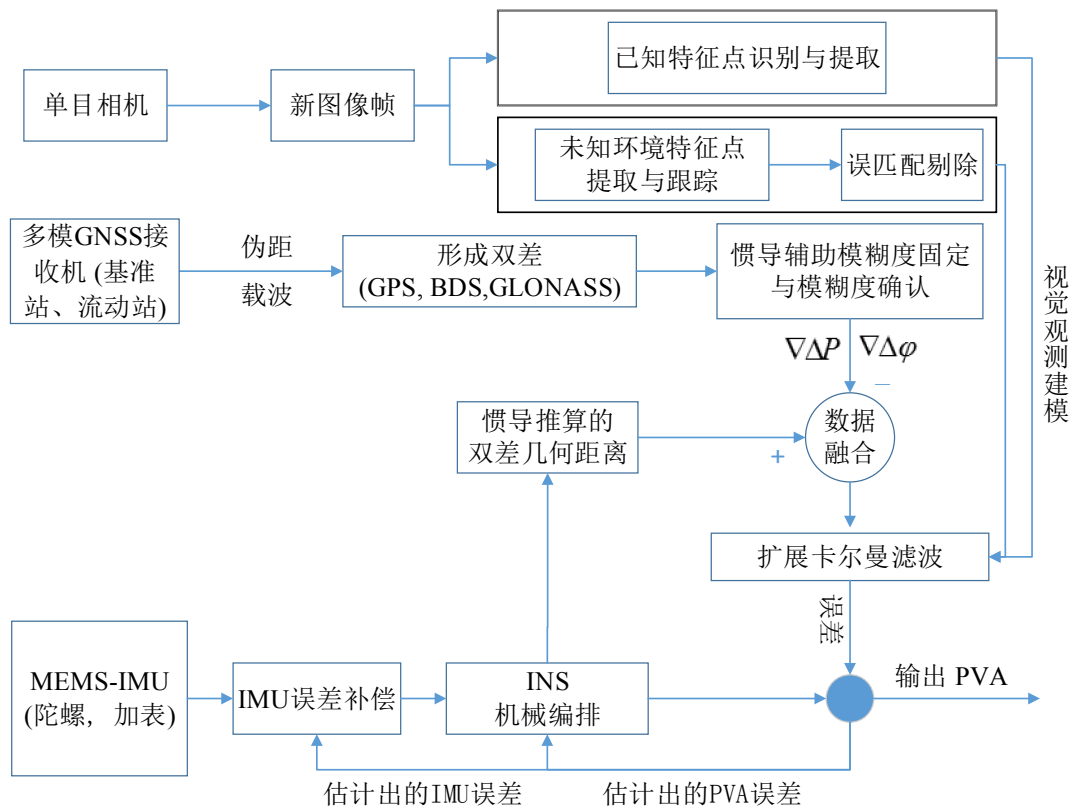


图 5.2 多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合算法框图 (PVA 表示位置、速度和姿态)

## 5.5 仿真实验验证与分析

为了验证和分析上述构建的基于已知特征点的视觉/INS 紧组合与基于多状态约束

的视觉/INS 紧组合两种滤波模型的正确性与性能, 本文搭建了 GNSS/INS/视觉仿真实验平台。由于松组合与紧组合在 GNSS 观测条件好的情况下可获取相当的精度(孙红星, 2004), 而目前无法仿真原始的伪距和载波相位观测量, 因此本文仅仿真 GNSS 位置观测值并进行 GNSS/INS 松组合解算, 作为两种视觉/INS 紧组合算法的对比。

### 5.5.1 GNSS/INS/视觉仿真数据

GNSS/INS/视觉仿真数据包括 GNSS 位置观测数据、IMU 原始数据和特征点数据。仿真数据生成的主要流程为: 首先根据设定的载体运动轨迹和 IMU 误差参数生成带有噪声参数的 IMU 原始数据和位置观测数据, 然后在载体运动周围均匀布设特征点, 并根据已知的 IMU 位置、姿态参数和相机-IMU 的外参将特征点投影到相机平面上获得特征点的像素坐标。

图 5.3 给出了载体的运动轨迹, 其真实的速度曲线如图 5.4 所示, 主要包括匀加速、匀减速和转弯三种不同的运动状态, 可以看出载体的最大速度为 6 m/s, 且在 Z 轴方向有 8 次短时间的加速和减速运动。仿真的 IMU 原始陀螺和加速度计数据如图 5.5 所示, 仿真采用的 IMU 是一款低端 MEMS-IMU (陀螺零偏稳定性为  $300\text{ }^\circ/h$ , 加速度计零偏稳定性为  $2000\text{ mGal}$ , 角度随机游走为  $0.5\text{ }^\circ/\sqrt{h}$ , 速度随机游走为  $3.0\text{ m/s}/\sqrt{h}$ ), 其数据率为  $200\text{ Hz}$ 。为了降低不同特征点分布对视觉/INS 组合导航解算造成的影响, 特征点均匀的布设在载体运动轨迹四周 (图 5.3), 且相机则朝向特征点分布的平面。

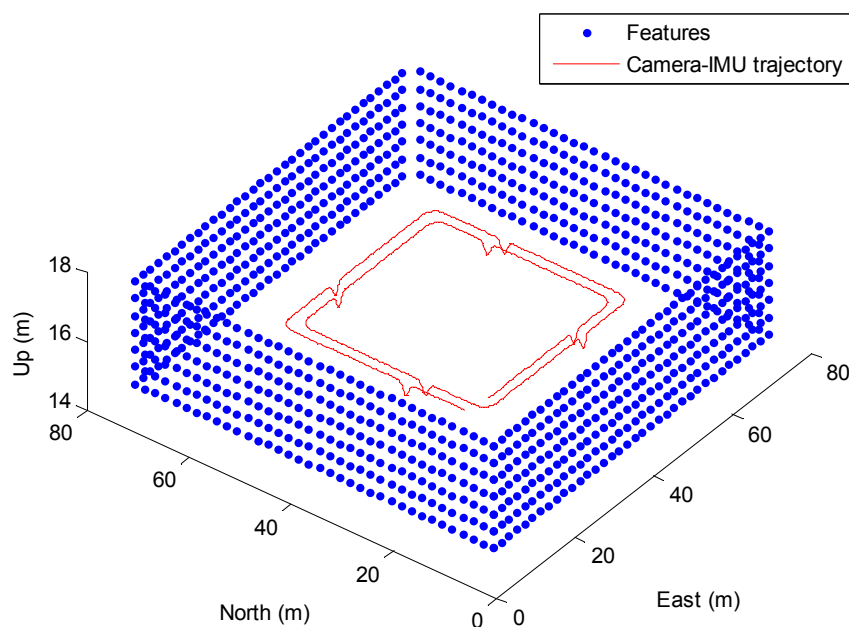


图 5.3 仿真轨迹与特征点分布

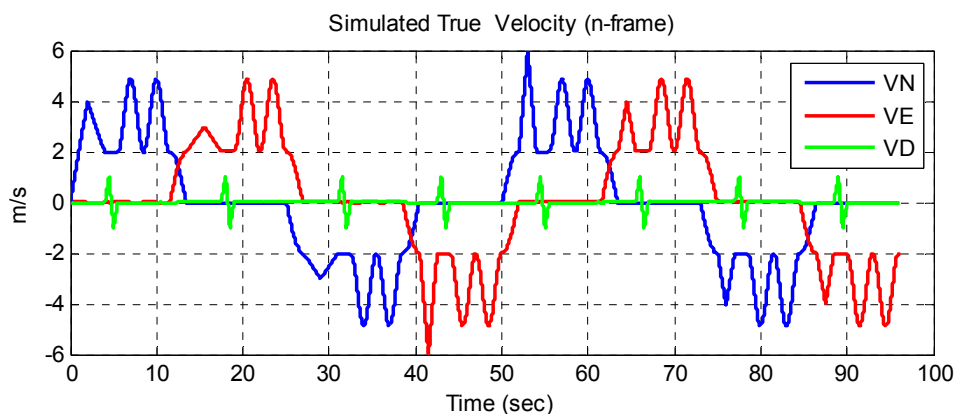


图 5.4 仿真载体平台的速度

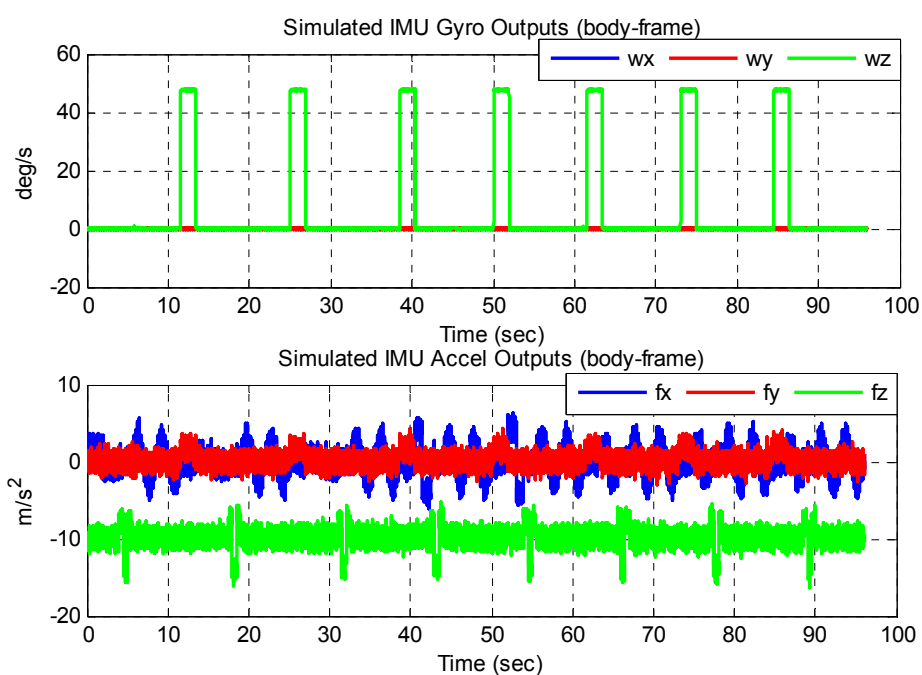


图 5.5 IMU 的原始数据输出

### 5.5.2 GNSS/INS 松组合

为了对比分析视觉/INS 紧组合的性能，图 5.6 给出了 GNSS/INS 松组合解算的位置、速度误差序列以及陀螺和加速度计零偏。在 GNSS/INS 松组合的解算过程中，位置测量值的更新频率为 1 Hz，且在 X、Y、Z 三轴方向上的标准差均设置为 0.05 m。从图中可以看出，载体姿态在航向角方向误差波动较大，这主要是由于仿真载体平台的动态较小导致航向的可观性很弱。此外，IMU 的零偏估值符合 IMU 性能指标。



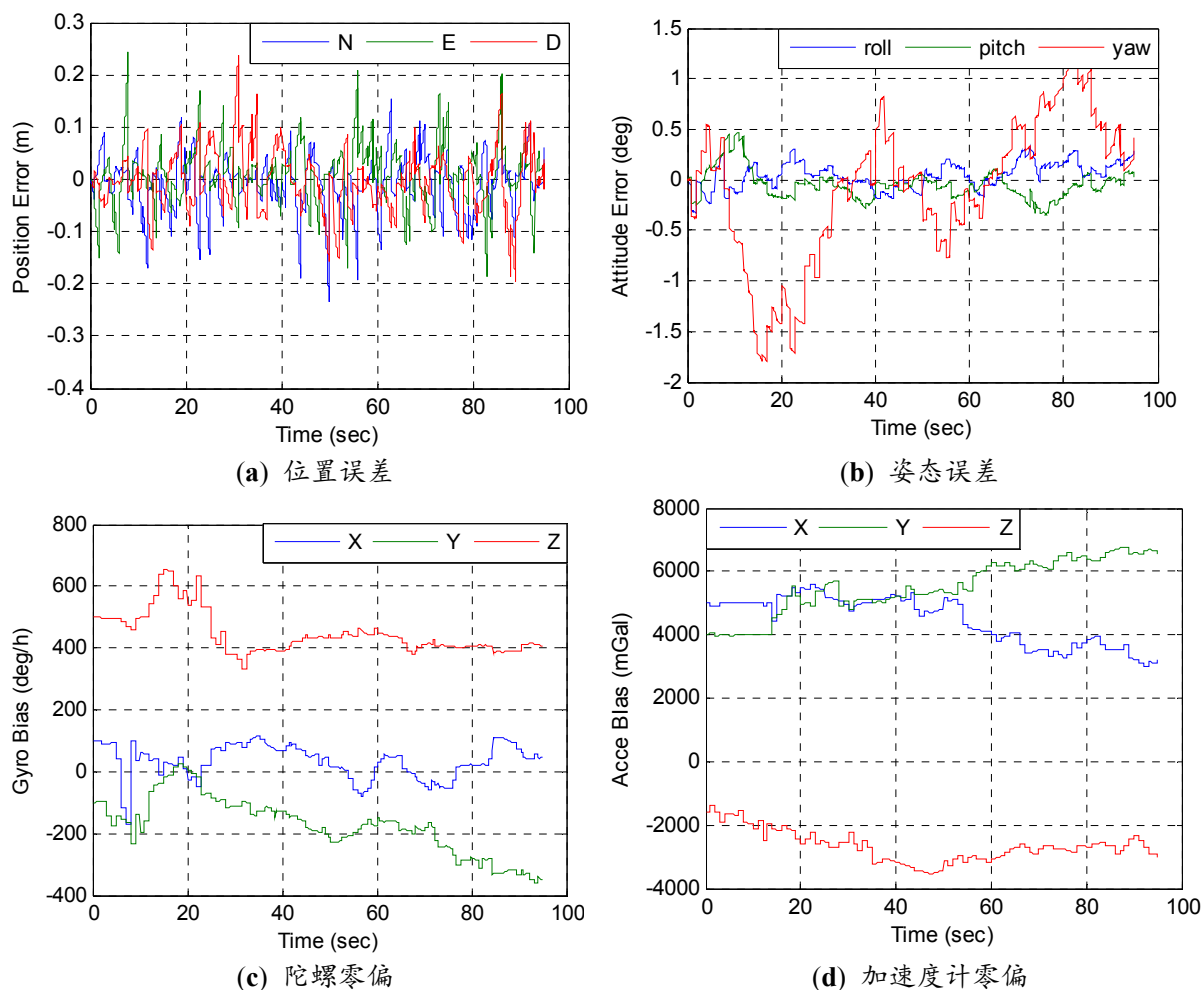


图 5.6 GNSS/INS 组合导航结果

### 5.5.3 基于已知特征点的视觉/INS 紧组合

图 5.7 给出了基于已知特征点的视觉/INS 紧组合解算位置、姿态误差序列以及陀螺和加速度计零偏，数据的前 30 s 采用的是 GNSS/INS 组合模式，30 s 之后则中断 GNSS 位置观测更新。在视觉/INS 紧组合解算过程中，视觉观测值的更新频率为 2 Hz。从图中可以看出，基于已知特征点的视觉/INS 紧组合能提供无误差漂移的高精度位置和姿态，特别是航向精度得到明显提高。这主要是因为在有已知特征点（至少 3 个）的情况下，影像可以独立地解算出自身的位置和姿态参数，不存在惯导航向可观性弱的问题。此外，从零偏曲线上可以看出，相较于 GNSS/INS 组合导航估计的航向轴陀螺零偏，基于已知特征点的视觉/INS 紧组合具有更强的可观性。

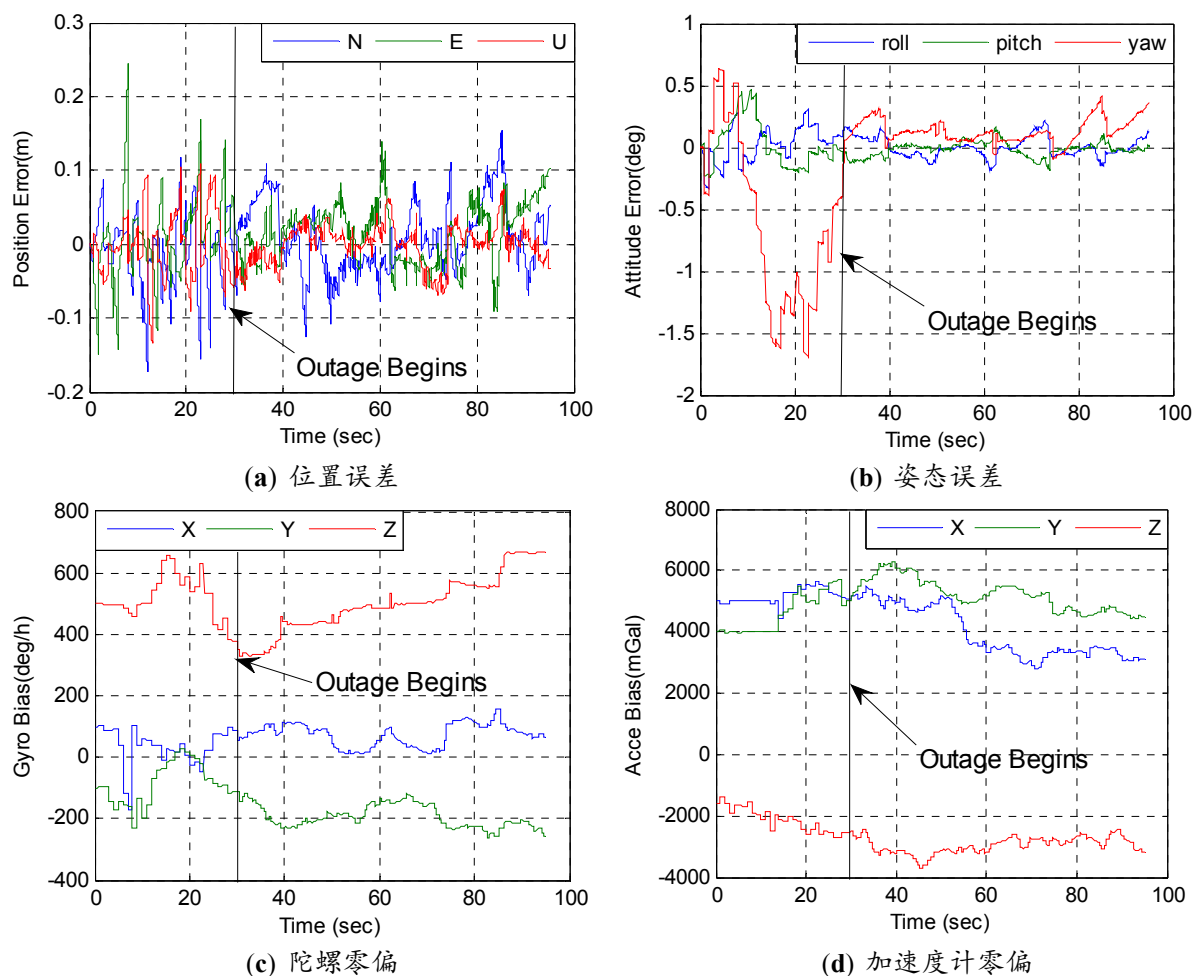


图 5.7 基于已知特征点的视觉/INS 紧组合滤波结果 (前 30 s 为 GNSS/INS 组合)

### 5.5.4 基于多状态约束的视觉/INS 紧组合

为了对比分析基于多状态约束的视觉/INS 紧组合性能, 首先给出了在没有外界辅助情况下 INS 独立导航的解算结果, 如图 5.8 所示。从图中可以看出, 当 GNSS 位置更新中断后, INS 的位置误差迅速增大, 在 65 s 的时间里位置误差在北、东、地三个方向分别达到 -118.516 m、-52.094 m、20.131 m, 而姿态中的航向误差则超过 3 度。

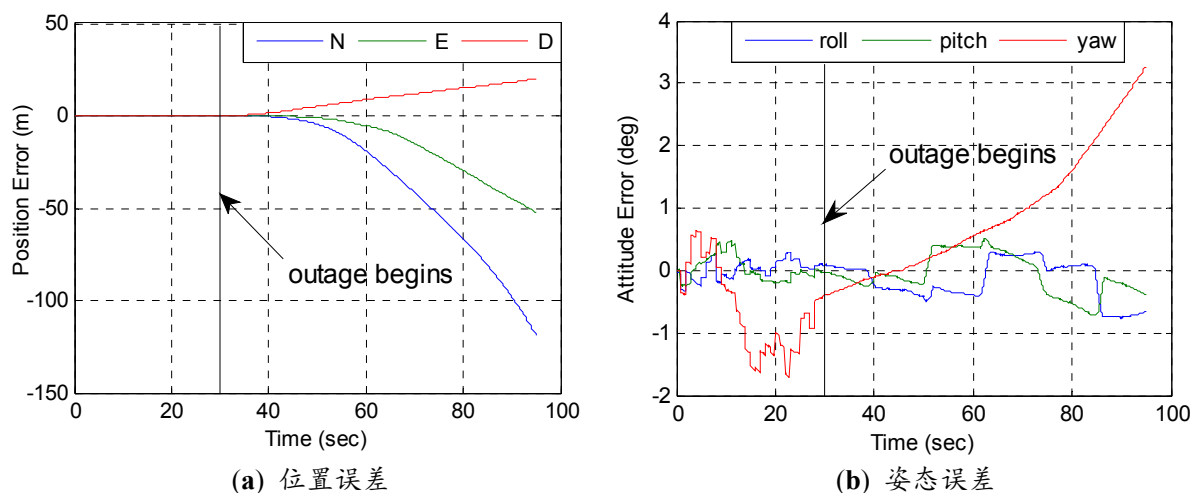
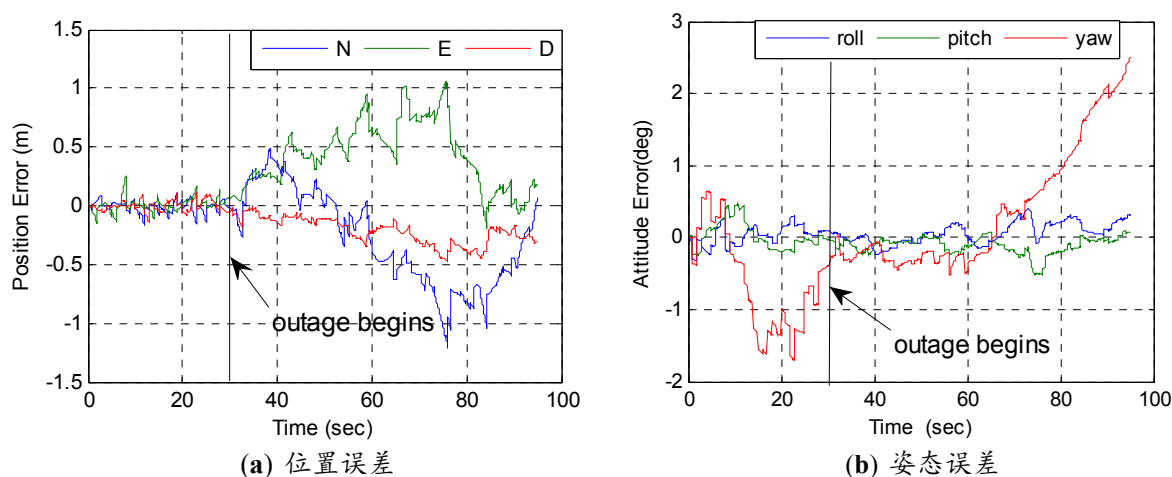


图 5.8 纯惯导结果 (前 30 s 为 GNSS/INS 组合)

图 5.9 给出了基于多状态约束的视觉/INS 紧组合解算的位置、姿态误差以及陀螺和加速度计零偏。从图中可以看出，基于多状态约束的视觉/INS 紧组合极大地改善了低成本 MEMS-IMU 在无 GNSS 辅助时的位姿估计精度。在 65 s 无 GNSS 辅助期间，紧组合在北、东、地三个方向上的最大误差小于 1 m，而且由于横滚和俯仰完全可观，因此没有误差漂移，在航向方向上误差漂移也小于 INS 独立解算的结果。这是因为在没有已知特征点的未知环境中，视觉/INS 组合导航只能提供相对位置和相对姿态信息，而且在航向方向具有不可观性(Kelly and Sukhatme, 2011)。然而视觉/INS 组合导航可以恢复出陀螺和加速度计的零偏(Kelly and Sukhatme, 2011; Martinelli, 2012)，从而可在一定程度上减少航向漂移的速度(Hong et al., 2005)。



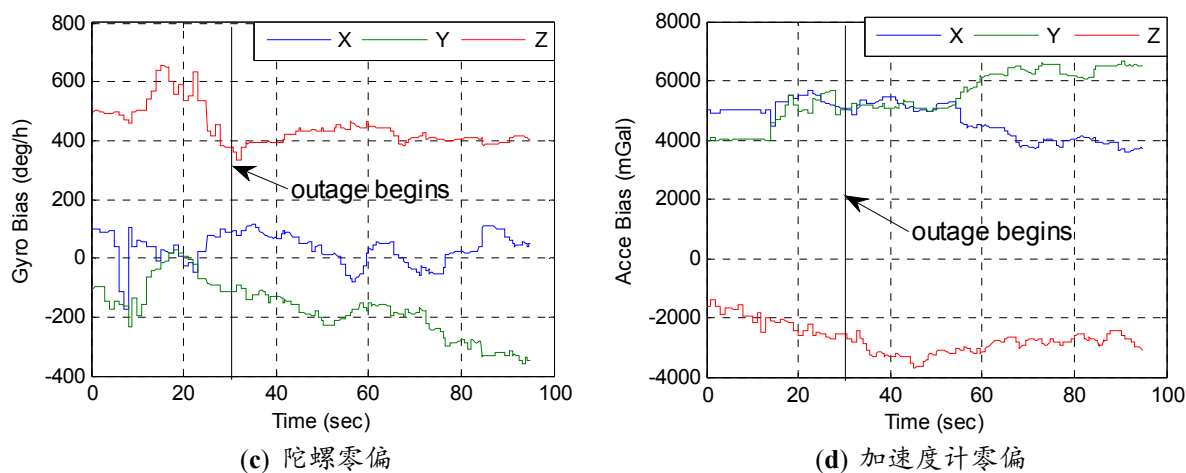


图 5.9 基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波结果 (前 30 s 为 GNSS/INS 组合)

## 5.6 本章小结

为了解决基于低成本 MEMS-IMU 的 RTK/INS 紧组合在 GNSS 复杂环境下由于 GNSS 信号中断导致的导航误差快速漂移问题, 本章深入研究了视觉辅助 INS 紧组合滤波建模方法, 包括基于已知特征点的视觉/INS 紧组合滤波模型和基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波模型, 并将这两种模型与 RTK/INS 紧组合模型结合构建了 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型。最后, 通过仿真数据验证了上述两种视觉/INS 紧组合滤波模型, 并与传统 GNSS/INS 松组合进行了对比。仿真实验表明, 基于已知特征点的视觉/INS 紧组合滤波模型可以获得无误差漂移的位姿估计结果, 且航向精度相对于 GNSS/INS 组合导航得到明显提高; 基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波能极大地减小 INS 的位置和航向漂移, 横滚和俯仰角完全可观而无误差漂移。

## 6 单频多模 RTK/INS/视觉紧组合性能测试与分析

### 6.1 引言

第 5 章提出了单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合算法模型, 该算法能充分利用多模 GNSS、MEMS-IMU 和视觉的优势, 进而提高移动载体在 GNSS 复杂环境下的高精度位姿估计精度。为了分析和验证该算法在 GNSS 复杂环境下的导航性能, 笔者搭建了融合 GNSS、惯导和单目相机的数据采集软硬件平台, 完成了各传感器的标定, 最后在 GNSS 复杂环境下开展了车载测试, 并使用采集的多源数据对 RTK/INS/视觉紧组合算法进行了分析和验证。基于已知特征点绝对定位的视觉/INS 组合导航算法模型较为简单, 部分学者对其进行了较为充分地实测试验(Wu et al., 2005; Trawny et al., 2007; Vu et al., 2012; 张晓东, 2013; 王力, 2015)。由于在未知的复杂 GNSS 环境中进行精密定位定姿更具有挑战性, 因此本章只对未知环境下基于多状态约束的 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型进行实测试验和评估。

### 6.2 实验平台搭建



图 6.1 车载测试平台

图 6.1 为笔者搭建的车载测试硬件平台, 其中 GNSS 天线、惯导和相机三种传感器

通过刚度很高的 6 mm 厚铝板固联在测试车车顶，以保证在运动过程中传感器之间的相对空间关系不变。硬件平台上搭载的传感器有：测量型 GNSS 天线，Trimble NetR9 多频多模 GNSS 接收机，Trimble 测量型接收机 OEM 板卡，导航级激光惯导 POS 系统（提供位姿参考真值），汽车级 MEMS 惯导，Basler acA1600-20gm 型工业相机，其参数见表 6.1。实验中搭载的两款惯导的 IMU 性能参数见表 6.2，其中导航级激光惯导将与多频多模 GNSS 数据进行组合，为被测系统数据分析提供高精度参考真值。

表 6.1 Basler acA1600-20gm 相机参数

传感器类型	CCD
传感器尺寸（毫米）	7.16×5.44
分辨率（像素）	1628×1236
像元大小（微米）	4.4×4.4
接口	千兆网
曝光控制	相机 API 编程控制
	外部脉冲信号触发
帧率	20 fps
通道数/颜色	单通道/黑白
像素位深度	12 bits

表 6.2 车载实验中使用的 IMU 传感器性能参数

IMU 传感器	零偏稳定性		随机游走	
	陀螺 ( $^{\circ}/h$ )	加表 (mGal)	角度 ( $^{\circ}/\sqrt{h}$ )	速度 ( $m/s/\sqrt{h}$ )
导航级惯导	0.027	15	0.003	0.03
MEMS 惯导	10	1500	0.33	0.18

### 6.3 传感器的时空同步

GNSS、惯导、相机等传感器的数据融合首先需要解决时间和空间的同步问题。时间同步是指将各个传感器采集数据的时间统一到同一框架下，否则数据融合时将产生很大的系统误差，严重影响组合导航系统的导航性能。传感器之间的空间同步指的是确定各传感器之间的相对位置和相对旋转关系，对于 GNSS/INS/视觉组合导航而言，就是确定相机和惯导对应的两个坐标系之间的旋转 ( $R_c^b$ ) 和平移 ( $p_c^b$ )，也称为相机-惯导外参

数，如图 6.2 所示。

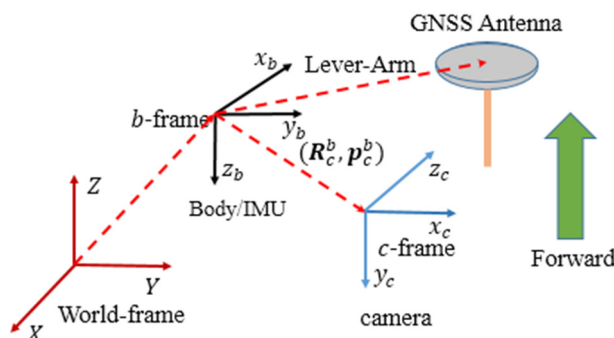


图 6.2 传感器空间关系示意图

### 6.3.1 时间同步

一般而言，GNSS/INS 组合导航设备输出的 IMU 原始数据已被打上 GPS 时间戳，而 GNSS 接收机给出的原始观测数据也都有相应的 GPS 时间，因此 GNSS 和 IMU 通过 GPS 时间实现了精确同步。然而，相机采集图像信息的过程一般是独立的，因此为了实现 GNSS、惯导和相机的时间同步，需要记录图像采集时刻对应的 GPS 时间戳。

本文实验将利用 GNSS 接收机提供的 PPS 秒脉冲和相机曝光事件信息来精确记录图像采集时刻的 GPS 时间戳。首先，工业相机通过其 INPUT 接口接收 GNSS 接收机输出的 PPS 秒脉冲（20 Hz）外部信号实现硬触发曝光；然后，相机曝光发出的 EVENT 信号被 GNSS 接收机接收记录并保存下来，这样就从硬件层面实现了相机、惯导和 GNSS 三种传感器之间的时间同步。

### 6.3.2 空间同步（杆臂和安装角标定）

在 GNSS/INS/视觉组合导航中，惯导是主导航设备，而 GNSS 和相机则属于辅助传感器。为了融合三者的数据，需要确定相机和惯导、GNSS 天线和惯导之间的相对空间关系。由于 GNSS 天线相位中心只能提供三个自由度的绝对位置和速度，因此只需要确定 GNSS 天线相位中心在载体坐标系（ $b$ 系）中的位置向量即可，也即杆臂值（Lever-Arm），如图 6.2 所示。该杆臂值一般可通过直接量取的方式获得，而对于空间距离较大的杆臂则可以通过全站仪等设备来精确量测。

相比较而言，相机和惯导之间的相对几何关系则不能通过外部量测获取，而只能通过标定的方法获得。标定方法主要有两类：第一类方法利用已知的地面控制点独立地求解序列影像的位置和姿态，然后和 GNSS/INS 组合导航解算的载体坐标系的位置和姿态建立对应的空间转换关系(Bäumker and Heimes, 2001; 袁修孝 et al., 2006)；另一类方法

将标定参数视为未知参数和载体位姿一起进行联合估计(Lobo and Dias, 2007; Mirzaei and Roumeliotis, 2008; Kelly and Sukhatme, 2011; Furgale et al., 2013; Li and Mourikis, 2013; Bender et al., 2014)。本论文实验采用 ETH ASL 实验室开源的 Kalibr 工具对惯导-相机外参进行标定(Furgale et al., 2013)，该方法需要将相机-惯导平台对着标定板运动，充分地激励 IMU 和相机的各个轴系使得标定参数具备良好的可观性。图 6.3 给出了标定用的 Aprilgrid 标定板和标定后的重投影误差。

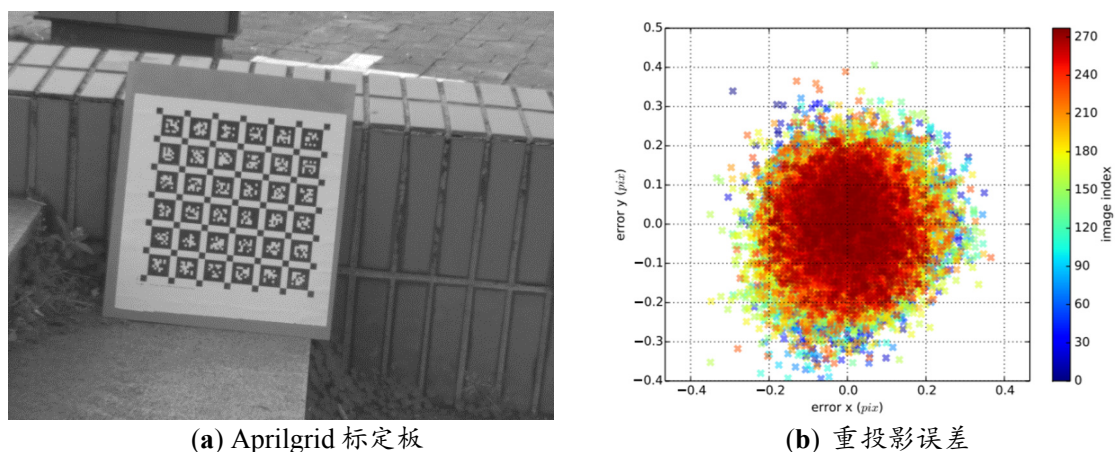


图 6.3 相机-惯导外参标定

## 6.4 测试描述与数据处理方案

### 6.4.1 车载测试描述

2018年8月15日在武汉大学校园内开展了实测车载实验,测试轨迹如图6.4所示,实验中搭载了6.2节介绍的硬件平台。测试过程中载体有比较丰富的动态,包括多次加减速和转弯等,其速度和姿态如图6.5所示。校园道路的两旁大部分被树木和建筑遮挡,这对高精度GNSS定位构成了巨大挑战,一些典型的道路场景如图6.6所示。为了保证特征点光流跟踪算法的有效性并提高跟踪性能,实验中将影像的采样率设为20Hz而图像分辨率设为 $640 \times 480$ (像素)。实验中GNSS基准站设置在武汉大学信息学部教学实验大楼楼顶,并使用Trimble NetR9多频多模接收机采集1Hz的原始伪距和载波相位数据,流动站接收机为测量型Trimble接收机板卡,其数据采样率设为1Hz,而导航级激光惯导和MEMS惯导的采样率均为200Hz。



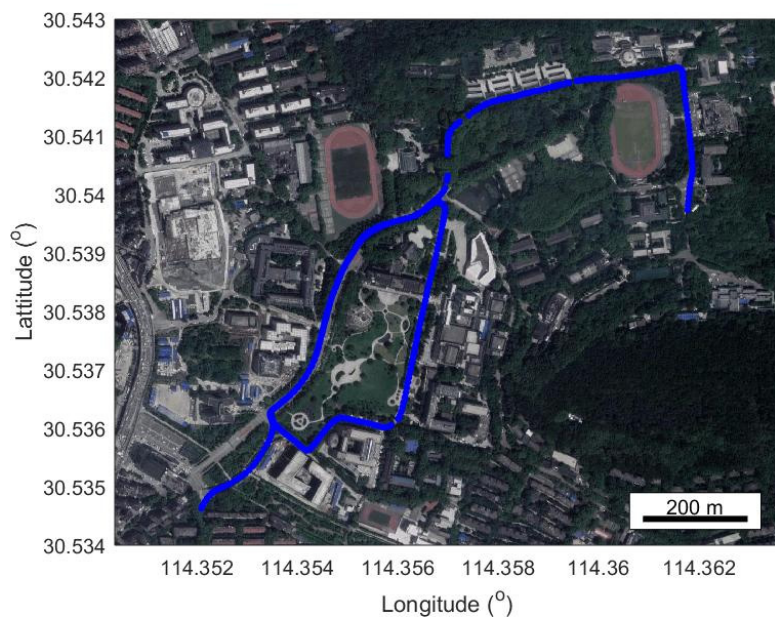


图 6.4 车载测试轨迹

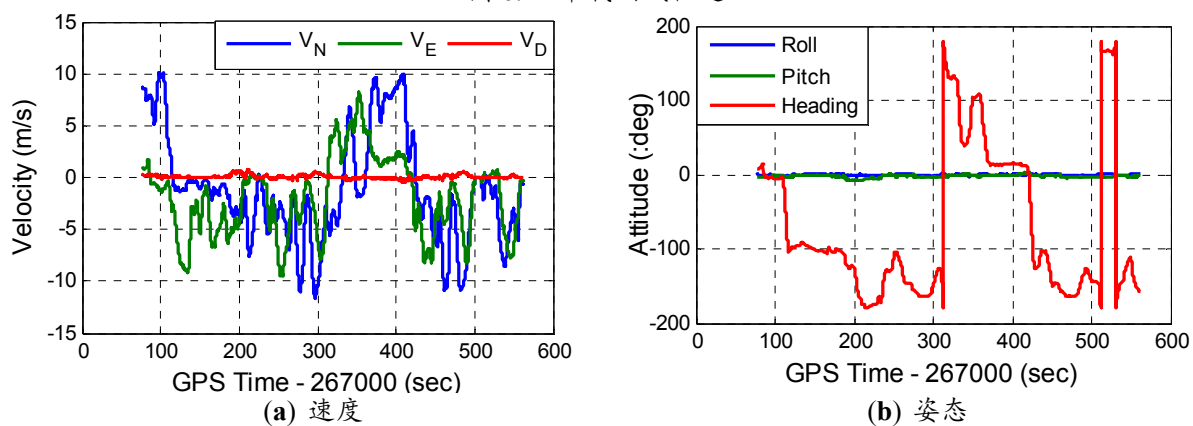


图 6.5 载体导航状态



图 6.6 典型的道路场景

## 6.4.2 数据处理方案

在 GNSS 数据处理中，由于基线的长度在 2 km 以内，所以双差电离层和对流层误差可以忽略。在复杂环境下，GNSS 观测值特别是伪距观测量非常容易受到多路径误差的影响，3.5 节提出的紧组合抗差算法将用于测量值粗差建模。本文仅使用 GPS、BDS 和 GLONASS 的单频数据用于评估 RTK/INS/视觉紧组合算法的性能，而双频 GPS+BDS+GLONASS 数据将与导航级激光惯导数据进行滤波融合并且采用 2.7.3 节介绍的最优平滑方法进行反向平滑计算来获取参考结果，包括位置、速度和姿态。

图像数据处理部分主要包括特征点的提取及其跟踪。首先，将图像分成固定大小的格网，使提取的特征点均匀分布；然后，在每个格网单元里提取出 Shi-Tomasi 分值最大的 FAST 角点(Shi and Tomasi, 1994; Rosten et al., 2010)。当一帧新图像接收到后，对上一帧提取的角点采用 KLT 稀疏光流法进行跟踪作为当前帧的部分特征点(Lucas and Kanade, 1981)。为了保证每一帧影像都有足够的特征点，对于跟踪丢失的区域将重新进行角点提取。此外，对于相邻两帧的特征匹配点，通过计算基于 RANSAC 的基本矩阵来剔除误匹配粗差点。在利用特征点的观测量进行滤波更新时，采用 5.3.2 节的粗差剔除方案去除动态物体上的特征点和误匹配点。图 6.7 给出了实验中两个不同场景下提取的 FAST 角点及其跟踪情况，可以看出有大量特征点能被连续跟踪上。

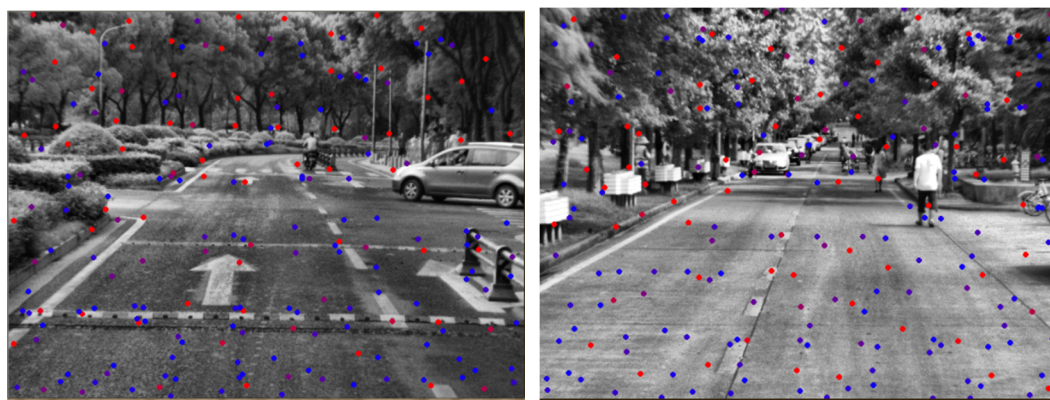


图 6.7 提取的 FAST 角点及其跟踪（红色表示跟踪次数多，蓝色表示跟踪次数少）

## 6.5 实验验证与性能分析

### 6.5.1 卫星可见性分析

GNSS 复杂环境下的卫星可见性对高精度 GNSS 定位至关重要，可见卫星的数量直接决定了 GNSS 定位的可用性、可靠性和定位精度。在城市等复杂环境下，由于高楼、天桥和公路两旁的树木等的遮挡，独立的 GPS 系统的可见卫星数非常有限，多系统 GNSS

将极大改善卫星可见性。图 6.8 给出了卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、BeiDou 和 GLONASS 的卫星可见性。从中可以看出，卫星信号被频繁地遮挡而中断，特别是 GLONASS 卫星，只有一颗卫星的跟踪比较连续稳定。卫星信号地频繁中断将会给 GNSS 高精度定位造成重大挑战。

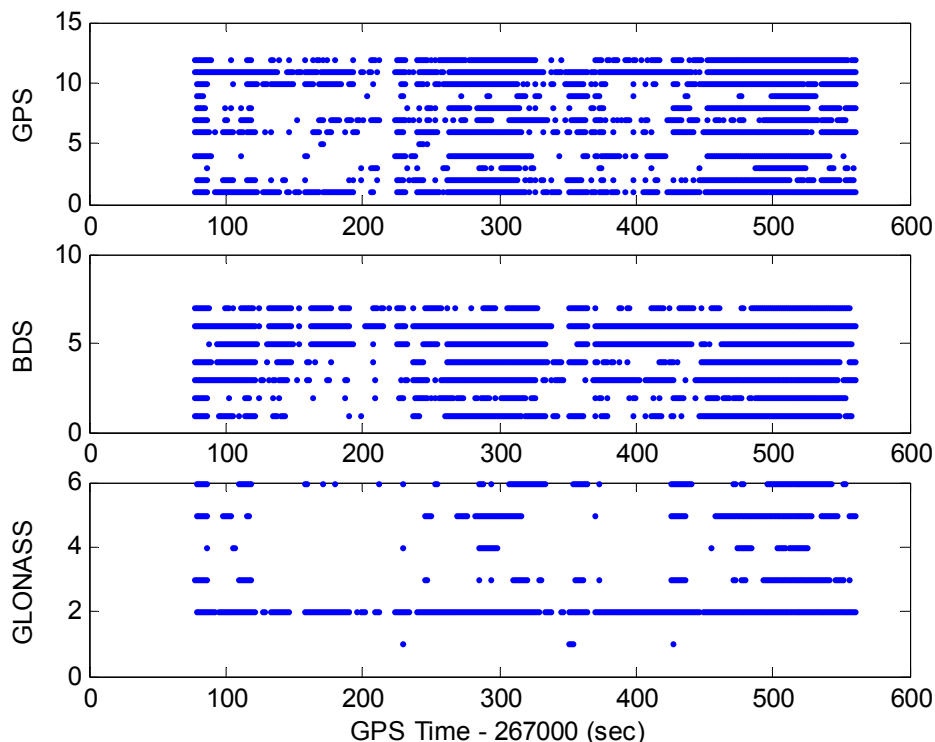


图 6.8 卫星截止高度角为  $15^\circ$  时 GPS、BeiDou 和 GLONASS 的卫星可见性

图 6.9 给出了 NetR9 接收机 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R) 的可见卫星数及其对应的 PDOP 值（定位计算过程中剔除了部分含较大粗差的卫星）。从图中可看出，在大多数时候 GPS 卫星的个数小于 5，因此独立的 GPS 定位可用性将非常有限；加入 BDS 和 GLONASS 系统后，组合系统的可用卫星数显著增加；GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 的平均 PDOP 值分别为 10.5、4.5 和 4.2。显然，相较于单独的 GPS 系统，多模 GNSS 对 PDOP 的改善超过 50%，这将显著地提升定位精度。

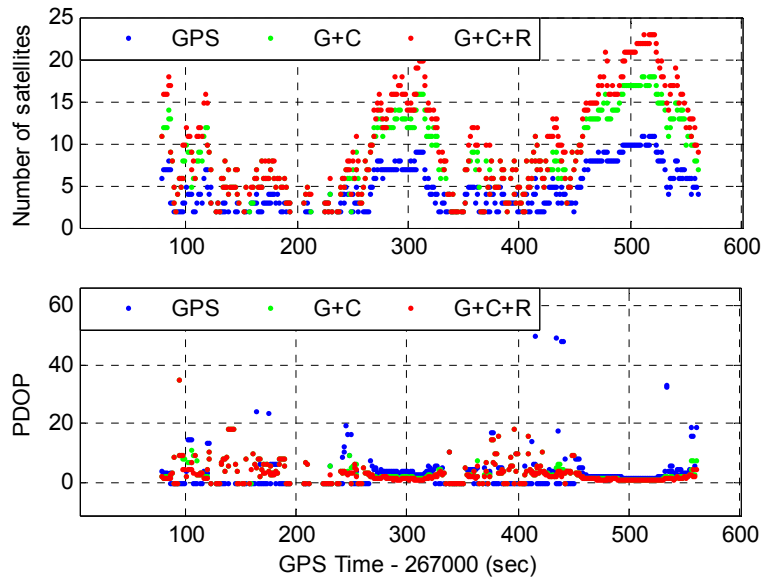


图 6.9 NetR9 接收机 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)的可见卫星数及其对应的 PDOP 值

### 6.5.2 定位性能分析

在评估多模 GNSS/INS/视觉紧组合算法的定位性能之前，首先分析了单频 RTK 定位结果。图 6.10 (a)和(b)分别给出了商用数据处理软件 GrafNav 8.7 版本解算的单频 GPS 和 GPS+BDS 定位结果与参考结果的差异。由于加入 GLONASS 后，GPS+BDS RTK 的定位结果并没有改善（可能是 GrafNav 软件的原因导致的），所以此处只提供了 GPS 和 GPS+BDS 的定位结果。从图中可以看出，单频 GPS RTK 定位结果非常差，定位可用性只有 34.3%且无法获得模糊度固定解。加入 BDS 后，GPS+BDS 的定位可用性达到了 56.9%，其中模糊度固定率为 39.1%。显然，复杂环境下多模 GNSS 可显著地改善定位精度和可用性。但是，独立的 GNSS 的定位可用性仍然有限并且一些历元的定位误差可达 10 m。

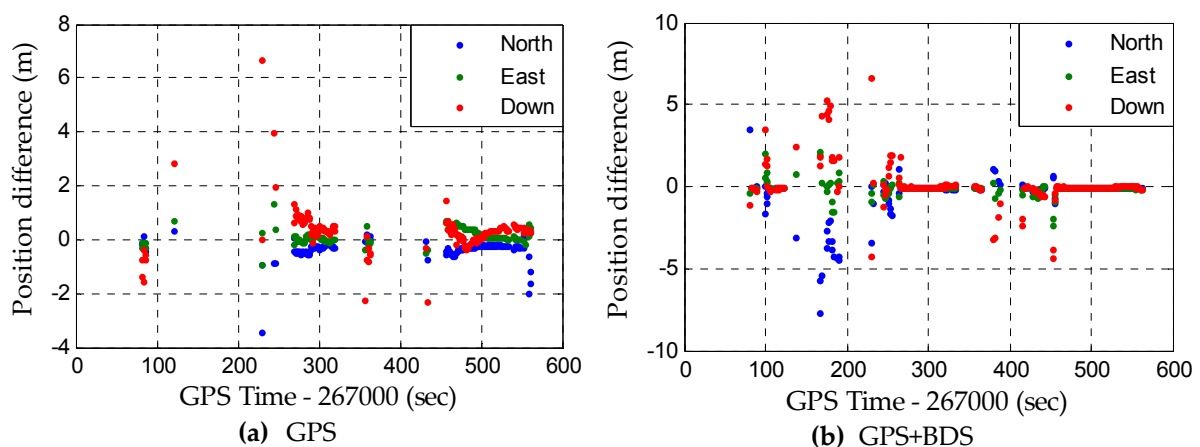


图 6.10 NetR9 接收机单频 RTK 定位结果与参考值差异 (GrafNav 8.7)

不同于 GNSS 定位, 惯导在初始化后可以提供连续的导航定位结果。但是, 惯导的主要缺陷是在无外界辅助时误差迅速发散, 如图 6.11 (a)所示。在 8 分钟无外界辅助后, 纯惯导的位置漂移误差超过 3 km。当惯导和视觉进行组合后, 组合系统的最大三维位置误差约为 3.5 m, 如图 6.11 (b)所示。考虑到车载轨迹的总长度大于 4 km, 惯导/视觉紧组合的位置误差随距离的积累程度小于 0.1%。

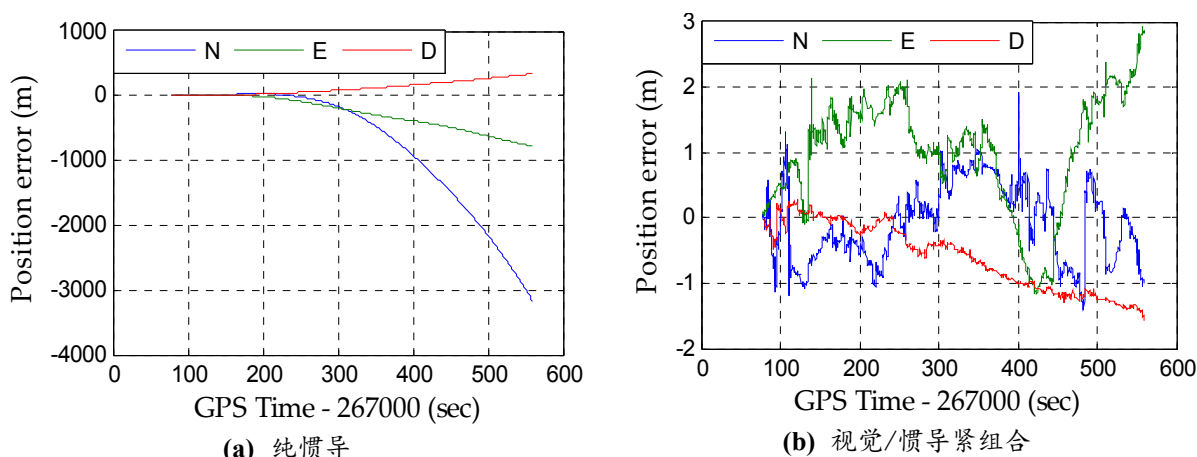


图 6.11 纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的位置误差序列

虽然视觉/惯导紧组合可以极大地限制惯导的位置误差漂移, 但是由于缺乏全局修正信息, 其误差仍然会逐步积累。当加入 GNSS 信息后, 组合导航系统的定位性能将会得到显著提高。图 6.12 和图 6.13 分别给出了 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)对应的 RTK/INS 紧组合和 RTK/INS/视觉紧组合解算的位置与参考值的差异序列。可以看出, 相较于 RTK/INS 紧组合, RTK/INS/视觉紧组合的定位性能得到显著提升, 多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向的最大误差均小于 1 m。我们注意到在历元 267240 附近, GPS+BDS+GLONASS RTK/INS/视觉紧组合在北方向的位置误差较 GPS+BDS RTK/INS/视觉紧组合要差一些, 这很可能是 GLONASS 卫星的伪距粗差导致。因为这段时间内可用卫星数非常有限 (图 6.9) 而且组合导航系统自身的误差也较大, 这时抗差算法无法对其进行合理建模。

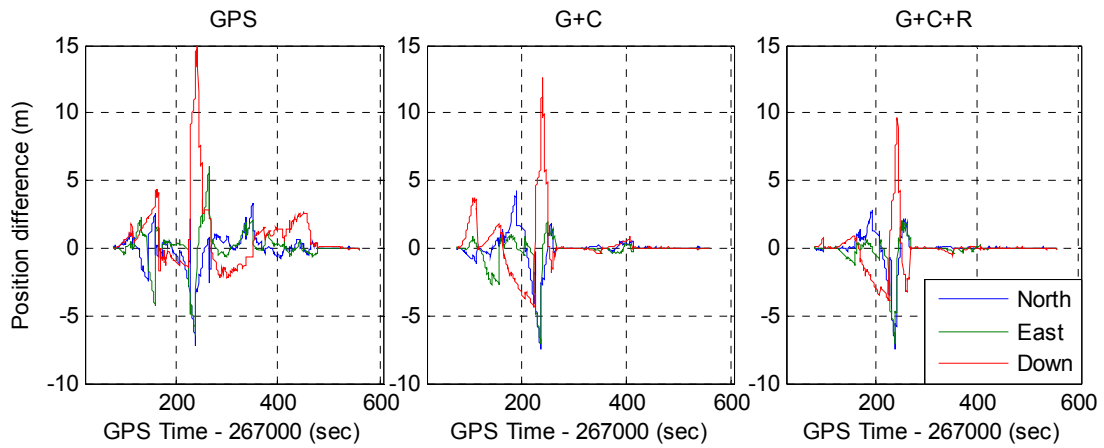


图 6.12 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合位置与参考值差异序列

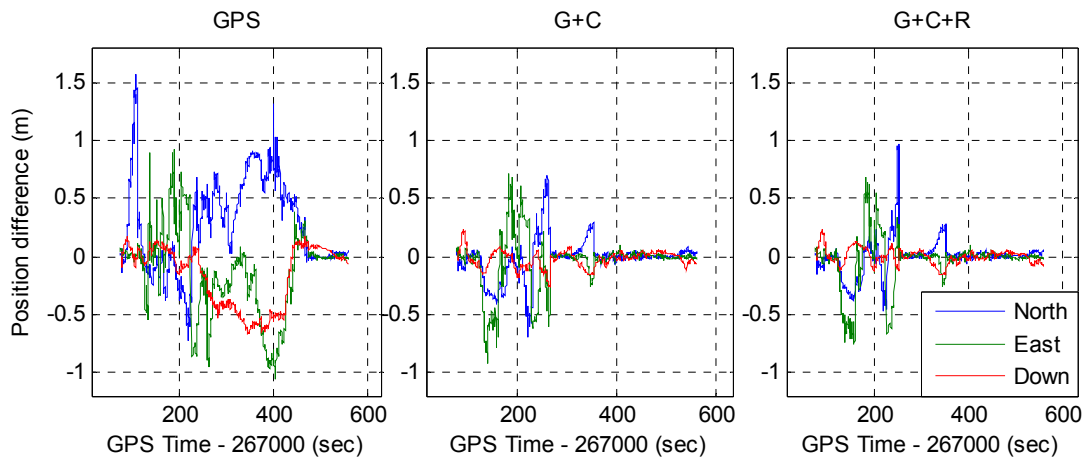


图 6.13 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合位置与参考值差异序列

为了进一步验证紧组合解算的精度，图 6.14 给出了 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向上的位置标准差。从中也可看出，在卫星可用性较差时 RTK/INS/视觉紧组合的位置标准差明显小于 RTK/INS 紧组合的位置标准差，而且二者在北、东、地三个方向上的位置差异小于 3 倍的位置标准差，这也印证了紧组合算法的解算精度。

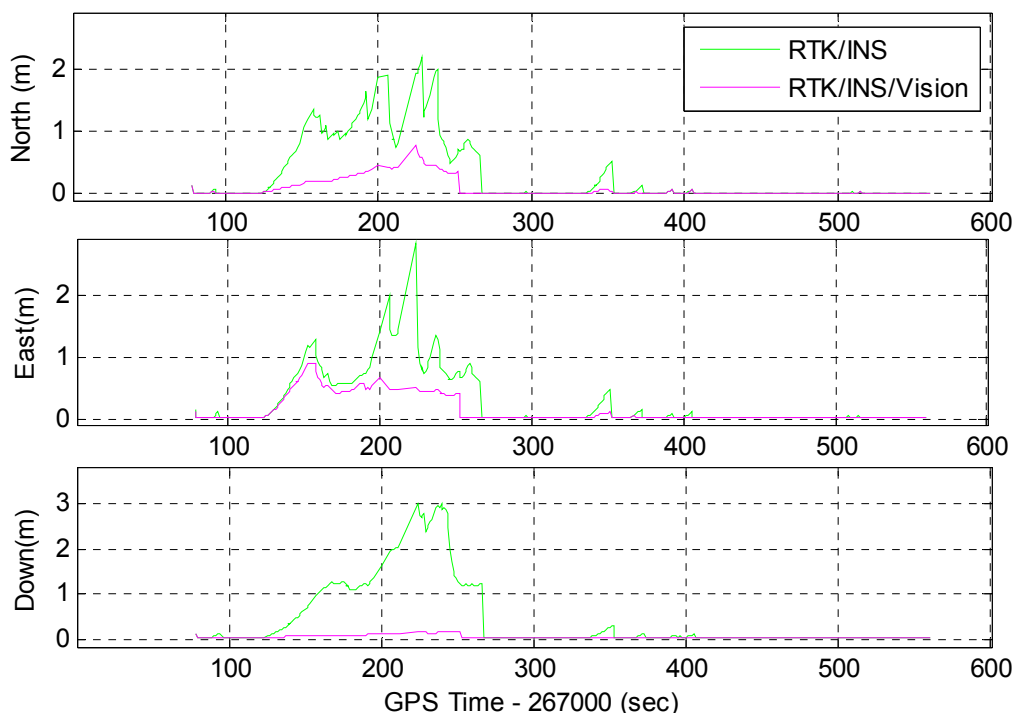


图 6.14 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向上的位置标准差（标准差为卡尔曼滤波协方差矩阵对角线元素的平方根）

表 6.3 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R) 分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS/视觉紧组合解算的位置与参考值的差异 RMS

RMS(m)	RTK/INS			RTK/INS/Vision			Improvement (%)		
	North	East	Down	North	East	Down	North	East	Down
GPS	1.182	1.346	2.717	0.474	0.390	0.308	59.9	71.0	88.7
G+C	1.206	1.097	2.016	0.177	0.232	0.076	85.3	78.9	96.2
G+C+R	1.092	0.985	1.556	0.152	0.219	0.065	86.1	77.8	95.8

三种不同 GNSS 组合系统对应的紧组合位置差异 RMS 统计结果如表 6.3 所示。从表中可看出, GPS RTK/INS 紧组合在北、东、地三个方向上的位置差异 RMS 分别为 1.182 m、1.346 m 和 2.717 m, 加入视觉后相对应的位置差异 RMS 降低到 0.474 m、0.390 m 和 0.308 m, 在北、东、地三个方向上的提升百分比分别为 59.9%、71.0%和 88.7%; GPS+BDS RTK/INS 紧组合在北、东、地三个方向上的位置差异 RMS 分别为 1.206 m、1.097 m 和 2.016 m, 对应的 RTK/INS/视觉紧组合的位置差异 RMS 分别为 0.177 m、0.232 m 和 0.076 m, 提升百分比分别为 85.3%、78.9%和 96.2%。对于 GPS+BDS+GLONASS 三系统组合, RTK/INS 紧组合在北、东、地三个方向上的位置差异 RMS 分别为 1.092 m、0.985 m 和 1.556 m, 加入视觉后在三个方向上提升的百分比分别为 86.1%、77.8%和 95.8%。加入视觉后位置精度得到大幅度提升主要是由于视觉辅助有效地降低了 MEMS

惯导的误差漂移，同时更高精度的系统状态也将有助于辅助 GNSS 模糊度解算。相较于 GPS+BDS 双系统，加入 GLONASS 后的三系统仅有小幅度的提升，这是因为在本次实验中 GLONASS 卫星的可用性非常有限（图 6.8）。

除了使用位置差异 RMS 统计值来评估定位性能，本文也对位置误差的分布进行了统计分析。由于车载测试中一些历元的 PDOP 值较大，所以即使在模糊度正确固定的情况下也可能出现较大的位置误差。同时，组合导航系统在短时间 GNSS 信号中断期间仍然可以提供连续的高精度定位结果，特别是在有视觉辅助的情况下，因此本文不对模糊度固定率进行统计分析，而重点关注高精度厘米级定位的可用性。

图 6.15 给出了 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合位置误差分布。统计结果显示，三种不同的 GNSS 系统对应的 RTK/INS 紧组合水平位置误差小于 0.1 m 的比例分别为 30.9%、57.9%和 72.4%，对应的高程误差小于 0.1 m 的比例分别为 9.4%、49.5%和 60.3%。这意味着 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合可以在 60%的时间获得厘米级定位结果。

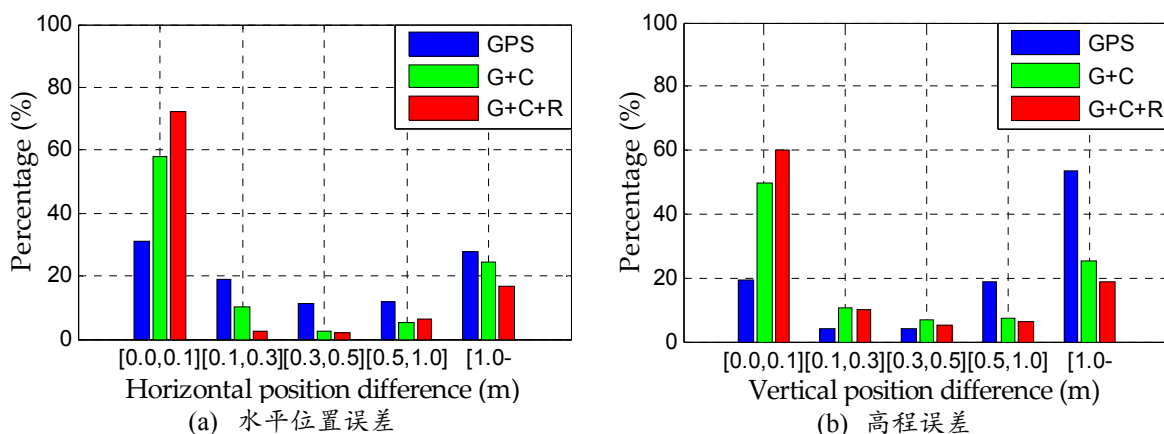


图 6.15 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合位置误差分布

相较于 RTK/INS 紧组合，RTK/INS/视觉进一步提高了高精度定位的可用性。图 6.16 给出了 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合位置误差分布。从图中可看出，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合水平位置误差小于 0.1 m 的比例 37.0%、76.0%和 80.9%。



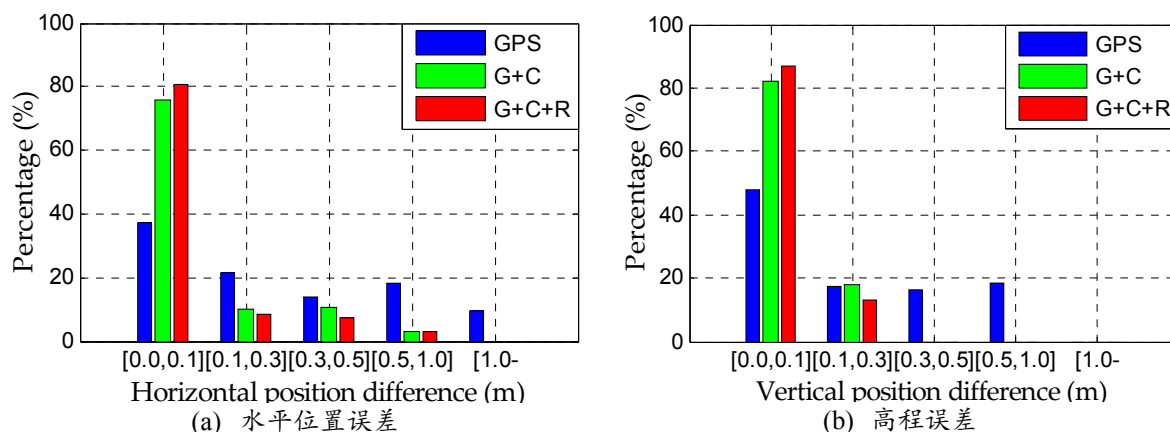


图 6.16 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合位置误差分布

### 6.5.3 测速性能分析

图 6.17 给出了纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的速度误差序列。从中可以看出，在没有外界辅助的情况下纯惯导解算的速度误差增大，在北、东、地三个方向上达到-19.539 m/s、-2.310 m/s 和-1.339 m/s。相对地，视觉/惯导紧组合的速度误差完全可观，在北、东、地三个方向上的最大误差均小于 0.2 m/s。

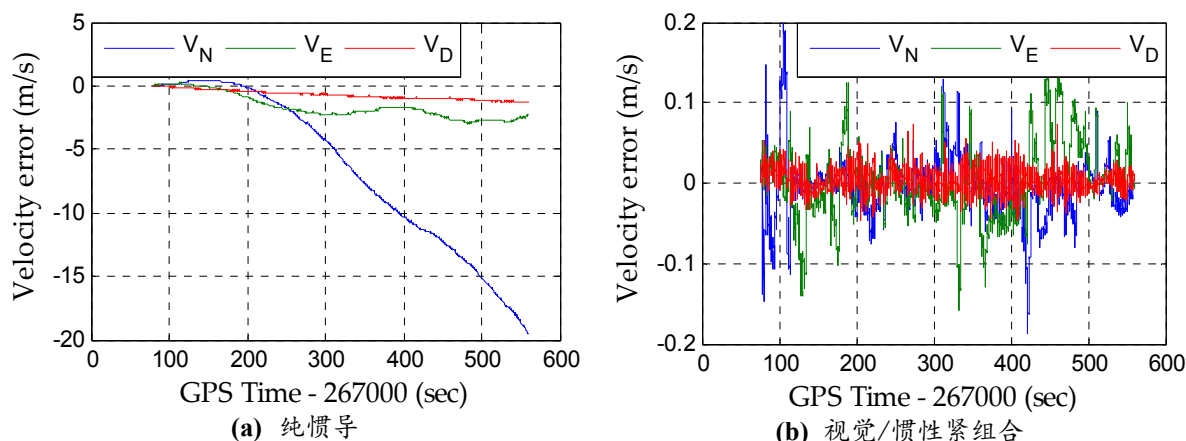


图 6.17 纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的速度误差序列

图 6.18 和图 6.19 分别给出了 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS 紧组合和 RTK/INS/视觉紧组合速度误差序列。从图中可看出，RTK/INS 紧组合的速度误差在 GNSS 中断期间小幅度发散，多 GNSS 系统 RTK/INS 相较于单 GPS RTK/INS 紧组合在速度上没有显著改善，主要原因是在短期 GNSS 失锁时，速度误差漂移较小且速度的精度由 IMU 本身的性能决定。由于 RTK/INS/视觉紧组合对速度的可观性，测速精度相对于 RTK/INS 有所提高，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向上的速度误差优于 0.2 m/s。

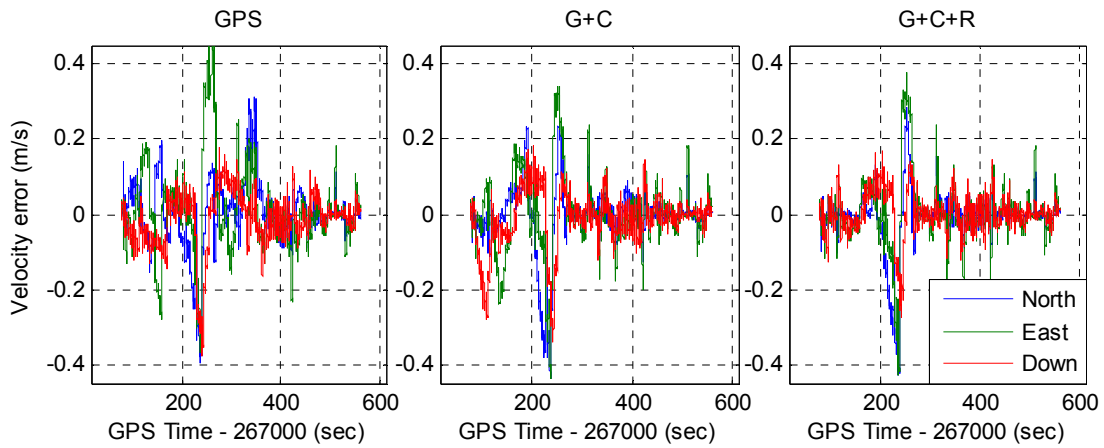


图 6.18 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合速度误差序列

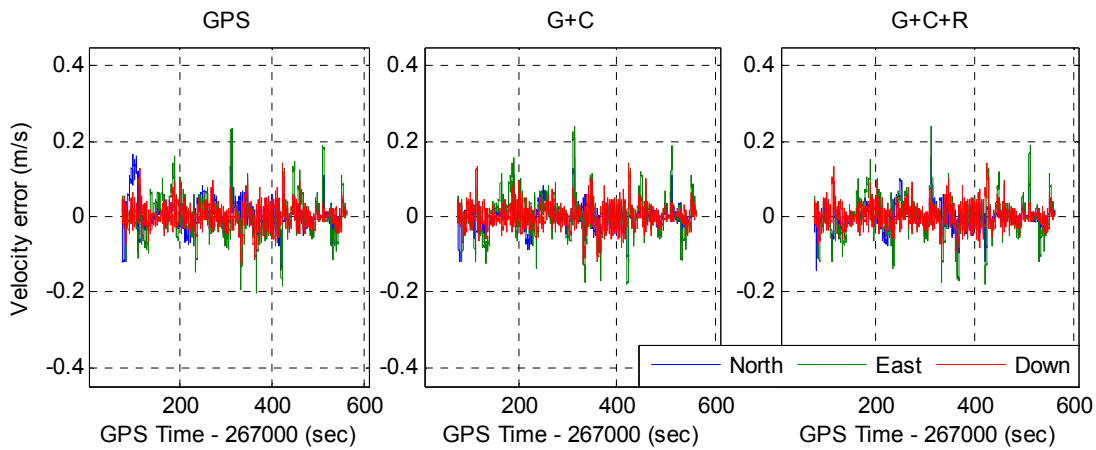


图 6.19 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合速度误差序列

图 6.20 给出了 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向上的速度标准差。从中可以看出，在 GNSS 观测条件较差时 RTK/INS/视觉紧组合能显著提高 RTK/INS 紧组合的速度估计精度，这与图 6.18、图 6.19 中给出的速度误差结果一致。

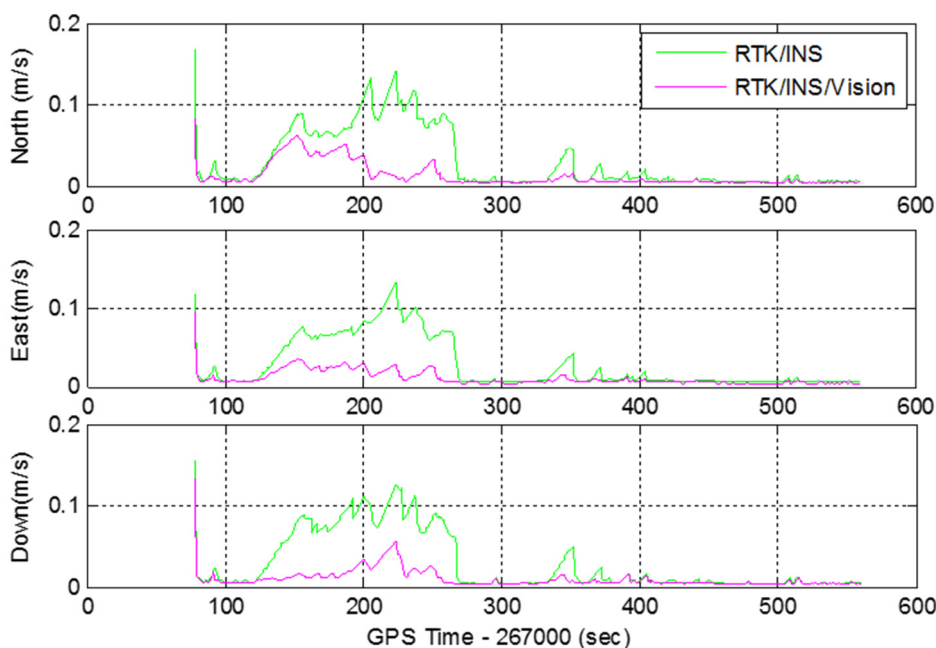


图 6.20 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向上的速度标准差（标准差为卡尔曼滤波协方差矩阵对角线元素的平方根）

表 6.4 给出了 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS 视觉紧组合解算的速度误差 RMS。根据统计结果，GPS RTK/INS 紧组合在北、东、地三个方向上的速度误差 RMS 分别为 0.092 m/s、0.119 m/s 和 0.075 m/s。相较于 GPS RTK/INS 紧组合，GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS 紧组合对速度估计精度的改善较小。进一步加入视觉辅助信息后，RTK/INS/视觉紧组合则可较大幅度的改善测速精度。统计结果表明，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 三种组合系统对应的 RTK/INS/视觉紧组合在北、东、地三个方向上的速度误差 RMS 平均值为 0.031 m/s、0.048 m/s 和 0.025 m/s。与 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 三种组合系统对应的 RTK/INS 紧组合的平均值相比，在北、东、地三个方向上提升的百分比分别为 64.5%、54.4%和 63.4%。

表 6.4 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS/视觉紧组合解算的速度误差 RMS

RMS(m/s)	RTK/INS			RTK/INS/Vision			Improvement (%)		
	North	East	Down	North	East	Down	North	East	Down
GPS	0.092	0.119	0.075	0.038	0.050	0.025	58.7	58.0	66.7
G+C	0.091	0.103	0.075	0.028	0.048	0.025	69.2	53.4	66.7
G+C+R	0.082	0.094	0.055	0.028	0.046	0.025	65.9	51.1	54.5

### 6.5.4 定姿性能分析

虽然惯导可以为运动载体提供高精度的姿态，但是低成本 MEMS 惯导在无其他传感器辅助时，姿态误差会逐渐累积发散，特别是航向角误差。图 6.21 (a)给出了纯惯导解算的误差序列，可以看出航向角的误差漂移速度明显快于横滚角和俯仰角。当加入视觉信息后，航向误差漂移的速度明显变小，如图 6.21 (b)，而且横滚角和俯仰角的误差不再漂移。这是由于视觉/惯导系统对横滚角、俯仰角和 IMU 的陀螺零偏等具有可观测性(Kelly and Sukhatme, 2011)。虽然视觉/惯导系统对航向角不具有可观测性，但是被估计出来的陀螺零偏会减小航向角的误差漂移速度(Hong et al., 2005)。

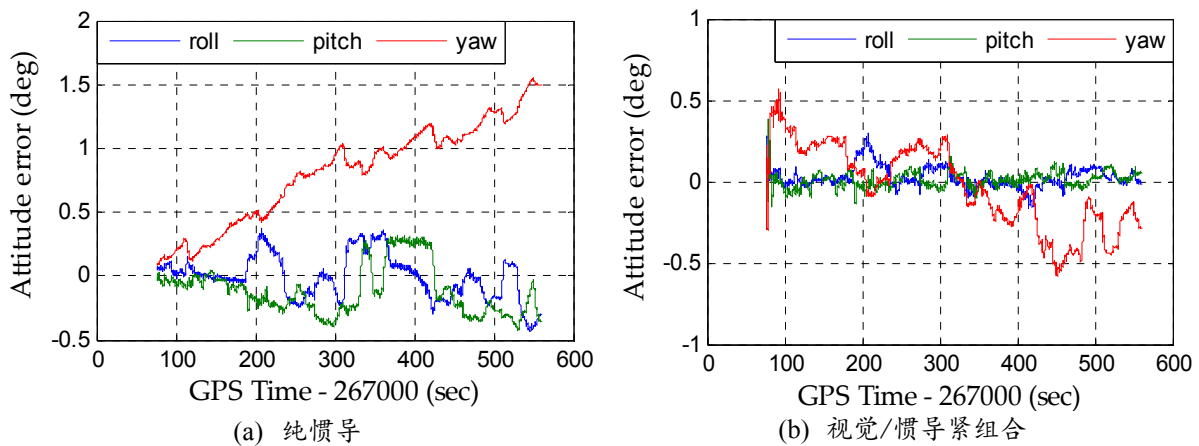


图 6.21 纯惯导和视觉/惯导紧组合解算的姿态误差序列

图 6.22 和图 6.23 分别给出了 GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS 和 RTK/INS/视觉紧组合的姿态误差序列。从中可看出，横滚角、俯仰角和航向角全部都具有可观测性，并且 RTK/INS/视觉紧组合能显著地提高航向角的精度，特别是单 GPS RTK/INS 紧组合的航向角精度。图 6.24 中给出的姿态标准差序列也证实航向角相较于横滚角和俯仰角的误差漂移更快，而加入视觉辅助后可明显减少航向角误差的漂移速度。

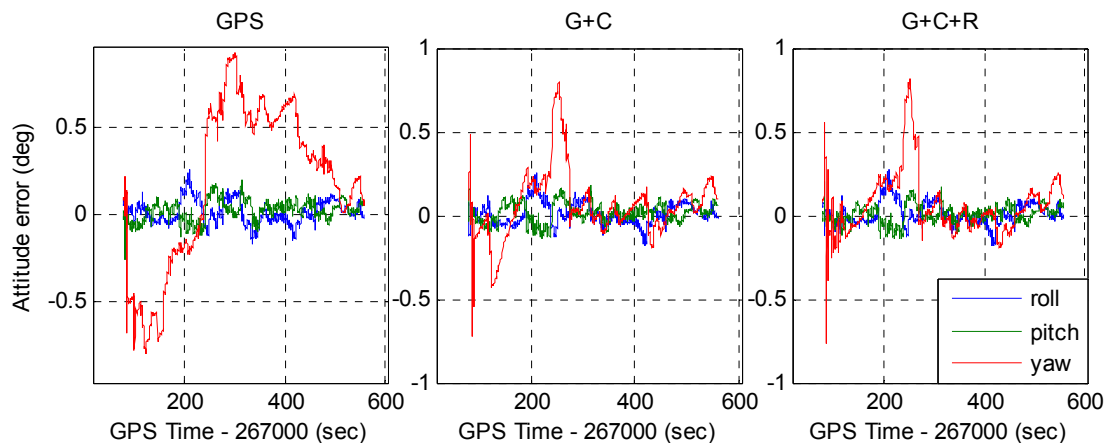


图 6.22 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS 紧组合姿态误差序列

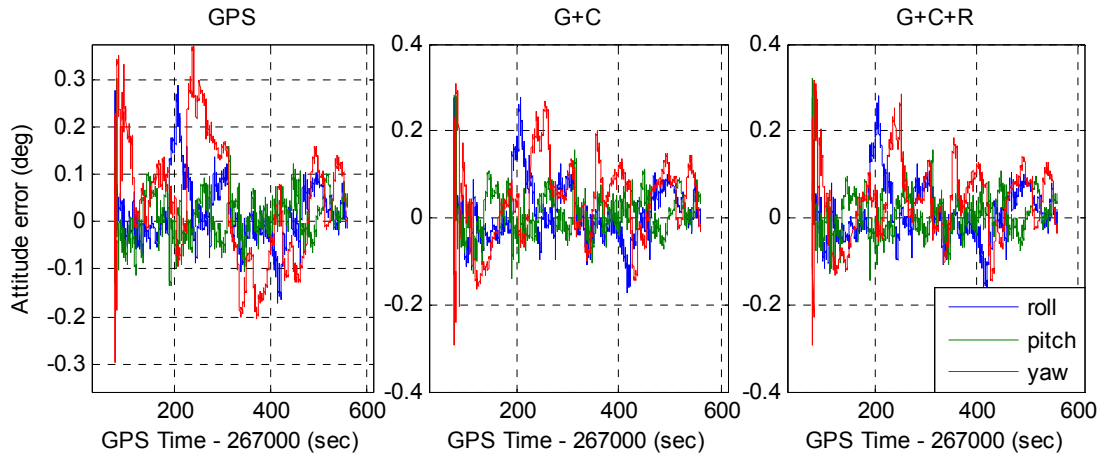


图 6.23 GPS、GPS+BDS (G+C)和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R)分别对应的 RTK/INS/视觉紧组合姿态误差序列

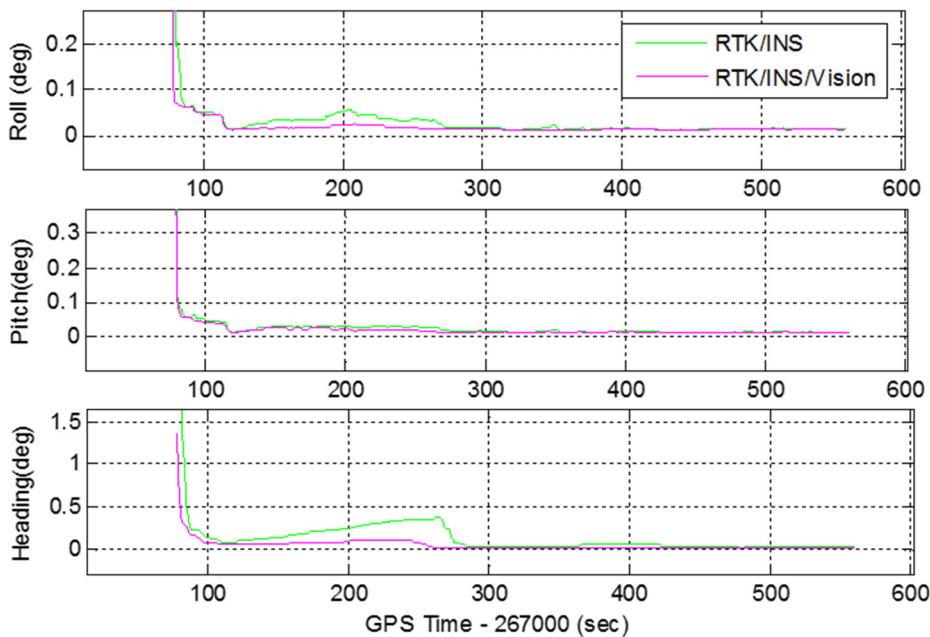


图 6.24 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 紧组合和对应的 RTK/INS/视觉紧组合的姿态标准差（标准差为卡尔曼滤波协方差矩阵对角线元素的平方根）

根据表 6.5 中的统计结果可知，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS 和 RTK/INS 紧组合的横滚角和俯仰角的误差约为  $0.04-0.07^\circ$ 。显然，多模 GNSS 和视觉辅助并没有显著改善横滚角和俯仰角的精度，其主要原因是横滚角和俯仰角在短时间的 GNSS 信号中断期间误差漂移很小，一旦有 GNSS 更新其误差便会被迅速

修正。然而，多模 GNSS 和视觉辅助能极大地改善航向角的精度。数据结果表明，GPS、GPS+BDS 和 GPS+BDS+GLONASS 分别对应的 RTK/INS 紧组合的航向角误差 RMS 为  $0.500^\circ$ 、 $0.214^\circ$  和  $0.198^\circ$ ；三种不同的 GNSS 组合系统相对应的 RTK/INS/视觉紧组合的航向角误差 RMS 分别为  $0.134^\circ$ 、 $0.099^\circ$  和  $0.092^\circ$ ；相较于 RTK/INS 紧组合，航向精度分别提升了 73.2%、53.7% 和 53.5%。在 GNSS/INS 组合导航中，一般航向角的可观性和精度比横滚角和俯仰角要低，加入视觉辅助后能有效改善航向的精度，这对一些有较高航向精度要求的应用将具有重要意义和价值。

表 6.5 GPS、GPS+BDS (G+C) 和 GPS+BDS+GLONASS (G+C+R) 分别对应的 RTK/INS 与 RTK/INS/视觉紧组合解算的姿态误差 RMS

RMS(deg)	RTK/INS			RTK/INS/Vision			Improvement(%)
	Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw	Yaw
GPS	0.070	0.063	0.500	0.066	0.046	0.134	73.2
G+C	0.066	0.058	0.214	0.065	0.045	0.099	53.7
G+C+R	0.068	0.052	0.198	0.066	0.044	0.092	53.5

## 6.6 本章小结

本章主要通过开展实测车载测试实验对单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合的导航性能进行了分析和验证。首先，搭建了含有 GNSS、IMU 和单目相机的硬件测试平台，并给出了对这三种传感器进行时间与空间同步的方法；然后，对车载测试环境进行了描述并给出了数据处理的方案；最后，对 RTK/INS 紧组合与 RTK/INS/视觉紧组合在定位、测速和定姿等方面的性能进行了评估和对比分析。根据上述实验结果可得到如下一些结论：

在 GNSS 观测受限的环境中，即使采用多系统 GNSS RTK 进行定位，其厘米级定位的可用性仍然很低，而且 GNSS RTK 定位精度完全依赖于 GNSS 观测值的质量。RTK/INS 紧组合技术则可以显著改善 RTK 定位的精度、连续性和可用性，特别是在使用多 GNSS 系统的情况下。结果表明，厘米级定位的比例从 GPS RTK/INS 的 30% 增加到 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 的 60%，这主要是因为多系统 GNSS 能有效地提高单频 RTK 的模型强度与模糊度固定率。加入视觉信息后，GPS RTK/INS/视觉紧组合的厘米级定位比例增加到 37%，而 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS/视觉紧组合的厘米级定位比例超过 80%，其主要原因是视觉辅助在减小 MEMS 惯导误差的同时也有助于辅助 GNSS 模糊度解算。显然，多系统 GNSS 和视觉均显著地提高 GPS RTK/INS 紧组合在复杂 GNSS 环境下的厘米级定位可用性，这也印证了本文提出的低成本单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合方案的可行性。

在测速方面，由于速度估计精度主要取决于 IMU 性能，而且在短时 GNSS 中断期

间误差漂移较小, 因此多模 GNSS RTK/INS 紧组合相对于 GPS RTK/INS 紧组合优势并不明显。然而, 由于视觉/INS 紧组合对速度完全可观, 因此, RTK/INS/视觉紧组合的速度没有发散误差, 这体现出视觉辅助的重要作用与价值。

在定姿方面, 基于低成本 MEMS-IMU 的 RTK/INS 紧组合在 GNSS 中断后航向角的误差会迅速增大, 而由于视觉/INS 紧组合对横滚角、俯仰角和陀螺零偏等具有可观性, 因此 RTK/INS/视觉紧组合可以完全维持横滚角、俯仰角的精度并且有效地降低航向角的误差漂移速度进而提高了其估计精度。

总体而言, 本文提出的低成本单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合方案可以极大地改善传统 GNSS/INS 组合在复杂 GNSS 环境下的定位、测速和定姿精度, 可为移动测图、无人机、自动驾驶、机器人等移动平台提供全球框架下的高精度位姿信息。

## 7 结论与展望

### 7.1 工作总结与创新点

针对自动驾驶、无人机、机器人和移动测图等应用对 GNSS 复杂环境下的低成本高精度定位定姿需求, 本文围绕单频多系统 GNSS (GPS+BDS+GLONASS) RTK 定位技术、惯性导航技术和视觉导航技术等展开研究, 提出了单频多系统 GNSS RTK/INS/视觉紧组合高精度定位定姿方案, 有效解决了基于低成本 MEMS-IMU 的 GNSS/INS 组合导航在 GNSS 中断期间下的误差漂移过快问题以及视觉/INS 组合的误差累积问题, 实现了复杂 GNSS 环境下的低成本高精度定位、测速和定姿。本文的具体研究工作和主要成果归纳如下:

1. 为了增强单频 RTK 在复杂动态环境下的高精度定位性能, 提出了单频多系统 GNSS RTK/INS 紧组合算法模型。首先, 建立了多系统 RTK 定位的数学模型, 包括观测方程和观测值随机模型的确定, 重点讨论了 GLONASS 模糊度固定方法; 然后, 阐述了附加模糊度参数和独立解算模糊度参数的两种 RTK/INS 紧组合数学模型, 包括各自状态方程、观测方程的建立以及 INS 辅助模糊度固定方法; 同时, 针对复杂 GNSS 环境下的 GNSS 观测粗差问题, 提出了一种适用于 RTK/INS 紧组合的两步抗差算法模型; 最后, 给出了 RTK/INS 紧组合算法的框架流程, 并通过开阔天空环境和城市复杂环境下的车载测试数据对 RTK/INS 紧组合算法在模糊度固定、重收敛、定位和抗差等方面的性能进行了全面评估与分析。结果表明, 在开阔天空环境下进行短基线定位时, 单频 GPS RTK 的单历元模糊度固定率仍然很低 (仅 8.4%), 而单频多系统 GNSS RTK/INS 在  $35^\circ$  或  $40^\circ$  的截止高度角下的单历元模糊度固定率超过 99%, 而且水平和高程动态定位精度均为厘米级。在城市复杂环境下, GNSS 观测值不可避免地受到多路径误差的影响, 进而降低模糊度固定率与可靠性, 本文提出的基于滤波新息的两步抗差紧组合算法有效地提高了复杂 GNSS 环境下的紧组合模糊度固定率。由于复杂环境下单 GPS 可见卫星数有限, 双频 GPS RTK 的单历元模糊度固定率依然很低, 且在短基线条件下, 单频多模 GNSS RTK 的模糊度固定率显著优于双频单 GPS RTK。加入 INS 辅助后, 单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定和定位性能甚至优于双频多系统 GNSS RTK, 而且随着截止高度角的增加 ( $25^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $35^\circ$ ), 单频多模 GNSS RTK/INS 紧组合的模糊度固定和定位性能只有小幅度降低。因此, 在短基线情况下, 采用单频多系统 GNSS 与低成本 MEMS-IMU 进行组合的 RTK/INS 紧组合技术在复杂 GNSS 环境下具备高精度定位的能力, 而且较双频多系统 GNSS RTK 更有优势。

2. 针对传统惯导绝对位置约束辅助模糊度固定方法在系统有偏状态下无法正确固



定模糊度的难题，创新性地提出了惯导相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型。首先，根据 IMU 预积分理论给出了 INS 相对位置增量的计算公式，并指出 INS 相对位置增量只需通过 IMU 观测值以及载体初始速度和姿态即可确定，而不需要求解中间状态的绝对导航参数；然后，给出了 INS 相对位置测量值辅助模糊度固定的原理公式，并指出该方法的本质为将动态定位转化为准静态定位；同时，为了使得该方法能有效用于模糊度固定，提出了一种 INS 相对位置增量辅助周跳探测的方法，该周跳探测方法在组合系统位置状态有偏差时仍能有效探测周跳；最后，通过实测车载数据对所提出的算法的有效性和性能进行了验证和评估。实验结果表明，INS 相对位置增量辅助周跳探测方法可以有效探测 1 周的小周跳（数据间隔为 1 s）；在 RTK/INS 紧组合绝对位置有偏的情况下 INS 仍能提供高精度的相对位置测量值，因此 INS 相对位置增量仍能用于辅助模糊度固定；对于开阔环境下的单频 GPS+BDS 数据，新算法模型能获得与传统 INS 绝对位置约束辅助的模糊度解算模型相当的模糊度固定性能。

3. 为了解决基于低成本 MEMS-IMU 的 GNSS/INS 组合导航在 GNSS 信号中断期间导航误差快速漂移问题，研究了基于已知特征点和基于多状态约束的两种视觉/INS 紧组合滤波模型，包括状态模型和观测模型的建立。同时，对多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波模型与最小二乘估计的等价性进行了证明，且指出了量测方程两边同时左乘特征点坐标对应的系数矩阵的零空间矩阵的合理性。最后，阐述了将两种视觉/INS 滤波模型与 RTK/INS 紧组合滤波模型结合为 RTK/INS/视觉紧组合滤波模型的方法，且设计了 GNSS/INS/视觉仿真实验对上述两种视觉/INS 紧组合滤波模型进行了验证和分析。仿真实验表明，基于已知特征点的视觉/INS 紧组合算法可以获得无误差漂移的位姿估计结果，且航向精度相对于 GNSS/INS 组合导航得到明显提高；基于多状态约束的视觉/INS 紧组合滤波能极大地减小 INS 的位置和航向漂移，这将有效弥补 GNSS/INS 组合导航在航向可观性弱的条件下航向角快速发散的缺陷。

4. 自主设计和搭建了含有 GNSS、IMU 和单目相机的硬件验证平台并完成了三种传感器之间的时间和空间同步（即杆臂和安装角标定补偿），在此基础上开展了 GNSS 复杂环境下的实测车载测试，并对单频多系统 GNSS RTK/INS 紧组合与 RTK/INS/视觉紧组合在定位、测速和定姿等方面的性能进行了评估和对比分析。实验结果表明，在 GNSS 观测受限的环境中，即使采用多系统 GNSS RTK 进行定位，其厘米级定位的可用性仍然很低；RTK/INS 紧组合技术则可以显著改善 RTK 定位的精度、连续性和可用性，车载实验中厘米级定位的比例从 GPS RTK/INS 的 30% 增加到 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS 的 60%，加入视觉信息后，GPS RTK/INS/视觉紧组合的厘米级定位比例增加到 37%，而 GPS+BDS+GLONASS RTK/INS/视觉紧组合的厘米级定位比例超过 80%。显然，多系统 GNSS 和视觉均显著地提高 GPS RTK/INS 紧组合在复杂 GNSS 环境下的厘米级定位可

用性。在测速方面，由于视觉/INS 紧组合对速度完全可观，因此，RTK/INS/视觉紧组合的速度误差没有漂移。在定姿方面，基于低成本 MEMS-IMU 的 RTK/INS 紧组合在 GNSS 中断后航向角的误差会迅速增大，而由于视觉/INS 紧组合对横滚角、俯仰角和陀螺零偏等具有可观性，因此 RTK/INS/视觉紧组合可以完全维持横滚角、俯仰角的精度并且有效地降低航向角的误差漂移速度进而提高了其估计精度。由此可见，单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合方案可极大提高 GNSS 复杂环境下的定位、测速和定姿的精度、连续性和可用性。

本文的创新点可凝练为以下三个方面：

(1) 针对单频 GPS RTK 模糊度固定率低的问题，提出了单频多模 GNSS (GPS、BDS 和 GLONASS) RTK/INS 紧组合算法模型，并全面评估了单频多模 RTK/INS 紧组合在城市复杂环境下的模糊度固定与定位性能。同时，针对 GNSS 复杂环境下的观测粗差问题，实现了基于滤波新息的适用于 RTK/INS 紧组合的两步抗差算法，有效提高了复杂 GNSS 环境下的模糊度固定成功率和可靠性。

(2) 针对传统惯导绝对位置约束辅助模糊度固定方法在系统有偏状态下无法正确固定模糊度甚至引起滤波发散的难题，创新性地提出了惯导相对位置约束辅助模糊度固定的新算法模型，克服了传统惯导辅助模糊度固定方法的缺陷。由于该方法利用了 INS 相对测量的本质，不受系统状态绝对有偏的影响，因此可以在 RTK/INS 紧组合状态有偏时正确固定模糊度，而且各独立滑动窗口中解算的模糊度可以互相检核从而进一步提高模糊度固定可靠性。

(3) 首次将视觉信息应用到 GNSS RTK 高精度定位中，提出了单频多模 GNSS RTK/INS/视觉紧组合低成本高精度定位定姿新方案，在地心地固坐标系下构建了 RTK/INS/视觉紧组合位姿估计滤波模型，有效解决了低成本 MEMS 惯导在 GNSS 信号中断期间导航误差快速漂移问题，极大地提高了 GNSS 复杂环境下的定位、测速和定姿的精度、连续性和可用性。同时，本文指出在未知环境下视觉辅助使得航向精度得以改善的本质原因是视觉/INS 紧组合可以有效估计陀螺零偏从而减缓航向发散速度。

## 7.2 研究展望

GNSS/INS/视觉紧组合是一项非常具有挑战性的交叉学科研究课题，涉及到 GNSS 精密定位、惯性导航、视觉导航和组合导航等方面的理论和算法。本文围绕复杂 GNSS 环境下的低成本高精度定位问题，开展了单频多模 GNSS/INS/视觉紧组合算法模型的研究，取得了一些有益的研究成果。但是由于时间和精力有限，仍然有以下问题需要进一步地深入研究：

(1) 本文的实验环境中动态车辆和行人较少，采用文中的粗差剔除方案可以满足需求。

但是，当复杂的城市道路上出现大量的动态车辆和行人时，粗差点可能会被引入到组合导航算法中，进而影响组合导航算法的状态估计精度。为了使组合导航算法更加可靠和实用，可考虑将融合定位算法与机器学习方法进行结合来实现场景中动态车辆和行人的识别，从而高效地避开粗差点。

- (2) GNSS/INS/视觉紧组合系统的快速初始化对于一些应用来说至关重要，然而视觉/INS紧组合系统是一种严重非凸的系统，对系统初值的精度要求较高，因此在多源融合框架下 GNSS 辅助系统快速初始化的研究非常重要。
- (3) 随着 GNSS 接收机技术的快速发展以及处理器计算能力的不断提升，有必要开展基于非线性优化的多模 GNSS/INS/视觉紧组合的研究，进一步提升组合系统在复杂环境下的高精度定位定姿性能。
- (4) 针对车载应用可进一步利用里程计等低成本传感器来增强当前方案，同时增加车体非完整运动约束以及车道线约束等辅助信息。

由于本人水平有限，论文中难免存在疏漏和不足，恳请各位老师和同行予以批评指正，以便作者能继续深入开展相关研究。

## 参考文献

- 柴洪洲, 潘宗鹏, 崔岳. 2016. GNSS 多系统组合精密定位研究进展[J]. 海洋测绘, 36(4): 21-26.
- 陈起金. 2016. 基于 A-INS 组合导航的铁路轨道几何状态精密测量技术研究[D]. 武汉: 武汉大学.
- 陈小明. 1997. 高精度 GPS 动态定位的理论与实践[D]. 武汉: 武汉测绘科技大学.
- 陈允芳, 叶泽田. 2007. 基于多传感器融合的车载移动测图系统研究[J]. 测绘通报, 2007(1): 5-7.
- 邓辰龙. 2016. 多频多系统 GNSS 实时双差模糊度解算理论与方法研究 [D]. 武汉: 武汉大学.
- 董绪荣, 张守信, 华仲春. 1998. GPS/INS 组合导航定位及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社.
- 段举举, 沈云中. 2012. GPS / GLONASS 组合静态相位相对定位算法[J]. 测绘学报, 41(6): 825-830.
- 房建成, 杨胜, 刘百奇. 2007. 高性能 POS 及其在移动测图系统中的应用[J]. 红外与激光工程, 36(s2): 478-482.
- 韩厚增. 2015. 单频 GPS/BDS/MEMS IMU 紧组合模糊度固定抗差模型[J]. 中国惯性技术学报, 23(4): 493-499.
- 郝万亮, 孙付平. 2015. 基于双卡尔曼滤波器的高精度 POS 算法研究[J]. 测绘通报, (6): 12-15.
- 胡友健, 梁新美, 许成功. 2006. 论 GPS 变形监测技术的现状与发展趋势[J]. 测绘科学, 31(5): 155-157.
- 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 2005. 大地测量学基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社.
- 李征航, 黄劲松. 2010. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉: 武汉大学出版社.
- 刘浩敏, 章国锋, 鲍虎军. 2016. 基于单目视觉的同时定位与地图构建方法综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 28(6): 855-868.
- 刘经南, 邓辰龙, 唐卫明. 2014. GNSS 整周模糊度确认理论方法研究进展[J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 39(9): 1009-1016.
- 柳响林. 2003. 考虑随机模型精化的精密 GPS 动态定位新方法[J]. 测绘学报, 32(4): 293-300.
- 罗建军, 袁建平, 刘祥林. 2001. 卫星导航系统的发展及其军事应用[J]. 全球定位系统, 26(1): 25-29.
- 马丹, 徐莹, 鲁洋, et al. 2017. 复杂环境下的 GPS/BDS/GLONASS 结合的单频 RTK 定位性能研究[J]. 华中师范大学学报(自科版), 51(2): 253-263.
- 秦永元. 2006. 惯性导航[M]. 北京: 科学出版社.
- 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 1998. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社.
- 隋春玲, 谢建涛, 于合理, et al. 2015. 基于 GPS/GLONASS/BDS 组合的单历元单频短基线 RTK 定位算法研究[J]. 测绘与空间地理信息, (10): 154-157.
- 隋心, 徐爱功, 郝雨时, et al. 2018. 实时 GLONASS 相位频间偏差粒子群优化估计方法[J]. 测绘学报, 47(5): 584-591.
- 孙红星. 2004. 差分 GPS/INS 组合定位定姿及其在 MMS 中的应用[D]. 武汉: 武汉大学.
- 唐卫明. 2006. 大范围长距离 GNSS 网络 RTK 技术研究及软件实现[D]. 武汉: 武汉大学.
- 王加芳. 2017. GPS/Visual/INS 多传感器融合导航算法的研究[D]. 杭州: 浙江大学.
- 王力. 2015. 影像/GNSS/INS 组合精密定位定姿方法研究[D]. 武汉: 武汉大学.
- 王之卓. 1979. 摄影测量原理[M]. 北京: 测绘出版社.
- 魏子卿. 2008. 2000 中国大地坐标系及其与 WGS84 的比较[J]. 大地测量与地球动力学, 28(5): 1-5.
- 谢宏飞, 郝金明, 刘伟平, et al. 2013. INS 位置精度对 GPS 整周模糊度解算影响分析[J]. 全球定位系统, (1): 52-56.

- 杨元喜. 2006. 自适应动态导航定位[M]. 北京: 测绘出版社.
- 杨元喜. 2015. 导航与定位若干注记[J]. 导航定位学报, (3): 1-4.
- 杨元喜, 李金龙, 王爱兵, et al. 2014. 北斗区域卫星导航系统基本导航定位性能初步评估[J]. 中国科学: 地球科学, 44(1): 72.
- 姚宜斌, 胡明贤, 许超铃. 2016. 基于 DREAMNET 的 GPS/BDS/GLONASS 多系统网络 RTK 定位性能分析[J]. 测绘学报, 45(9): 1009-1018.
- 叶世榕. 2002. GPS 非差相位精密单点定位理论与实现[D]. 武汉: 武汉大学.
- 袁信. 1993. 导航系统[M]. 航空工业出版社.
- 袁信, 郑谔. 1985. 捷联惯性导航系统原理[M]. 北京: 航空工业出版社.
- 袁修孝, 付建红, 楼益栋. 2007. 基于精密单点定位技术的 GPS 辅助空中三角测量[J]. 测绘学报, 36(3): 251-255.
- 袁修孝, 杨芬, 赵青, et al. 2006. 机载 POS 系统视准轴误差检校[J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 31(12): 1039-1043.
- 张国良, 李呈良, 邓方林, et al. 2004. 弹道导弹 INS/GNSS/CNS 组合导航系统研究[J]. 导弹与航天运载技术, (2): 11-15.
- 张康, 郝金明, 蒲湘文, et al. 2016. BDS/GPS/GLONASS 组合单频单历元高精度相对定位性能分析[J]. 全球定位系统, 41(1): 43-48.
- 张全. 2015. GNSS/INS 组合导航短期精度的分析方法及应用研究[D]. 武汉: 武汉大学.
- 张提升. 2013. GNSS/INS 标量深组合跟踪技术研究 with 原型系统验证[D]. 武汉: 武汉大学.
- 张天光, 王秀萍, 王丽霞. 2007. 捷联惯性导航技术. 北京: 国防工业出版社.
- 张晓东. 2013. 可量测影像与 GPS/IMU 融合高精度定位定姿方法研究[D]. 郑州: 信息工程大学.
- Al-Shaery A, Zhang S, Rizos C. 2013. An enhanced calibration method of GLONASS inter-channel bias for GNSS RTK[J]. GPS Solutions, 17(2): 165-173.
- Alkan R M. 2001. GPS single point positioning without selective availability[C]//The 2001 US Hydrographic Conference, Norfolk, Virginia.
- Altmayer C. 2000. Enhancing the integrity of integrated GPS/INS systems by cycle slip detection and correction[C]//Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 5-5 October, Dearborn, MI, USA. 174-179.
- Angrisano A. 2010. GNSS/INS integration methods[D]. Calgary: The University Of Calgary.
- Bäumker M, Heimes F. 2001. New calibration and computing method for direct georeferencing of image and scanner data using the position and angular data of an hybrid inertial navigation system[C]//OEEPE-Workshop Integrated Sensor Orientation, Hannover, Germany.
- Bayoud F A. 2005. Vision-Aided Inertial Navigation Using a Geomatics Approach[C]//Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2005), September 13 - 16 2005, Long Beach, CA. 2485-2493.
- Bayoud F A, Skaloud j, Merminod B. 2004. Photogrammetry-derived Navigation Parameters for INS Kalman Filter Updates[C]//Proceedings of the 2004 International Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ISPRS) Congress, 12-23 July 2004, Istanbul, Turkey. 252-257.
- Bender D, Schikora M, Sturm J, et al. 2014. INS-camera calibration without ground control points[C]//Sensor Data Fusion: Trends, Solutions, Applications, 8-10 Oct. 2014, Bonn, Germany. IEEE: 1-6.

- Benson D O. 1975. A Comparison of Two Approaches to Pure-Inertial and Doppler-Inertial Error Analysis[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-11(4): 447-455.
- Bloesch M, Burri M, Omari S, et al. 2017. Iterated extended Kalman filter based visual-inertial odometry using direct photometric feedback[J]. International Journal of Robotics Research, 36(10): 1053-1072.
- Bloesch M, Omari S, Hutter M, et al. 2015. Robust visual inertial odometry using a direct EKF-based approach[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 28 September-2 October 2015, Hamburg, Germany. IEEE: 298-304.
- Bortz J E. 1971. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-7(1): 61-66.
- Bouguet J-Y. 2003. Camera calibration toolbox for MATLAB. (<http://robots.stanford.edu/cs223b04/JeanYvesCalib/index.html#ref>).
- Brückner M, Bajramovic F, Denzler J. 2014. Intrinsic and extrinsic active self-calibration of multi-camera systems[J]. Machine Vision and Applications, 25(2): 389-403.
- Britting K R. 2010. Inertial navigation systems analysis[M]. New York: John Wiley.
- Brown R G, Hwang P Y. 1992. Introduction to random signals and applied Kalman filtering[M]. New York: Wiley.
- Cai C, Liu Z, Luo X. 2013. Single-frequency Ionosphere-free Precise Point Positioning Using Combined GPS and GLONASS Observations[J]. Journal of Navigation, 66(3): 417-434.
- Carcanague S, Julien O, Vigneau W, et al. 2013. Low-cost Single-frequency GPS/GLONASS RTK for Road Users[C]//the ION 2013 Pacific PNT Meeting, 23-25 April 2013, Honolulu, Hawaii, USA.8900: 168-184.
- Chatfield A B C. 1997. Fundamentals of high accuracy inertial navigation[M]. Reston, Virginia: AIAA.
- Chu C C, Lie F A P, Lemay L, et al. 2011. Performance comparison of tight and loose INS-camera integration[C]//Proceedings of the 24th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2011), September 20 - 23 2011, Portland, OR, USA. 3516-3526.
- Chu T, Guo N, Backén S, et al. 2012. Monocular Camera/IMU/GNSS Integration for Ground Vehicle Navigation in Challenging GNSS Environments[J]. Sensors, 12(3): 3162.
- Civera J, Davison A J, Montiel J M M. 2008. Inverse Depth Parametrization for Monocular SLAM[J]. IEEE Transactions on Robotics, 24(5): 932-945.
- Clark B J, Bevly D M. 2008. GPS/INS integration with fault detection and exclusion in shadowed environments[C]//IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, 5-8 May 2008, Monterey, CA, USA. IEEE: 1-8.
- Clement L E, Peretroukhin V, Lambert J, et al. 2015. The Battle for Filter Supremacy: A Comparative Study of the Multi-State Constraint Kalman Filter and the Sliding Window Filter[C]//2015 12th Conference on Computer and Robot Vision, 3-5 June 2015, Halifax, NS, Canada. IEEE: 23-30.
- Colombo O L, Bhopkar U V, Evans A G. 1999. Inertial-aided cycle-slip detection/correction for precise, long-baseline kinematic GPS[C]//Proceedings of the 12th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1999), September 14 - 17, Nashville, TN, USA. 1915 - 1922.
- Corke P, Lobo J, Dias J. 2007. An Introduction to Inertial and Visual Sensing[J]. The International Journal of Robotics Research, 26(6): 519-535.
- Counselman C C, Gourevitch S A. 1981. Miniature interferometer terminals for earth surveying: ambiguity and multipath with Global Positioning System[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,

- GE-19(4): 244-252.
- CSNO. 2013. Report on the development of BeiDou navigation satellite systems.
- Davison A J, Reid I D, Molton N D, et al. 2007. MonoSLAM: real-time single camera SLAM[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 29(6): 1052-1067.
- Deng C, Tang W, Liu J, et al. 2013. Reliable single-epoch ambiguity resolution for short baselines using combined GPS/BeiDou system[J]. GPS Solutions, 18(3): 375-386.
- Diel D D, DeBitetto P, Teller S. 2005. Epipolar Constraints for Vision-Aided Inertial Navigation[C]//2005 Seventh IEEE Workshops on Applications of Computer Vision, 5-7 Jan 2005, Breckenridge, CO, USA. IEEE,2: 221-228.
- Dong-Si T, Mourikis A I. 2011. Motion tracking with fixed-lag smoothing: Algorithm and consistency analysis[C]//2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 9-13 May 2011. 5655-5662.
- Dorn M, Filwarny J O, Wieser M. 2017. Inertially-aided RTK based on tightly-coupled integration using low-cost GNSS receivers[C]//European Navigation Conference (ENC), 9-12 May, Lausanne, Switzerland. 186-197.
- Eling C, Klingbeil L, Kuhlmann H. 2015. Real-Time Single-Frequency GPS/MEMS-IMU Attitude Determination of Lightweight UAVs[J]. Sensors, 15(10): 26212.
- Engel J, Schöps T, Cremers D. 2014. LSD-SLAM: Large-Scale Direct Monocular SLAM[C]//European Conference on Computer Vision, September 6-12, 2014, Zurich, Switzerland. Springer International Publishing: 834-849.
- Engel J, Stückler J, Cremers D. 2015. Large-scale direct SLAM with stereo cameras[C]//2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 28 Sept.-2 Oct. 2015, Hamburg, Germany. IEEE: 1935-1942.
- Eueler H-J, Goad C. 1991. On optimal filtering of GPS dual frequency observations without using orbit information[J]. Bulletin géodésique, 65(2): 130-143.
- Falco G, Gutiérrez C C, Serna E P, et al. 2014. Low-cost Real-time Tightly-Coupled GNSS/INS Navigation System Based on Carrier-phase Double-differences for UAV Applications[C]//the 27th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2014), 8-12 September 2014, Tampa, FL, USA. 841-857.
- Falco G, Pini M, Marucco G. 2017. Loose and Tight GNSS/INS Integrations: Comparison of Performance Assessed in Real Urban Scenarios[J]. Sensors, 17(2): 255.
- Farrell J, Barth M. 1999. The global positioning system and inertial navigation[M]. Mc Graw Hill, New York.
- Farrell J, Givargis T D, Barth M J. 2000. Real-time differential carrier phase GPS-aided INS[J]. Ieee Transactions on Control Systems Technology, 8(4): 709-721.
- Forster C, Carlone L, Dellaert F, et al. 2017. On-Manifold Preintegration for Real-Time Visual-Inertial Odometry[J]. IEEE Transactions on Robotics, 33(1): 1-21.
- Forster C, Pizzoli M, Scaramuzza D. 2014. SVO: Fast semi-direct monocular visual odometry[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2014), May 31 2014-June 7 2014, Hong Kong, China. IEEE: 15-22.
- Fraundorfer F, Scaramuzza D. 2012. Visual Odometry : Part II: Matching, Robustness, Optimization, and Applications[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 19(2): 78-90.

- Frei E, Beutler G. 1990. Rapid static positioning based on the fast ambiguity resolution approach FARA: theory and first results[J]. *Manuscripta Geodaetica*, 15(6): 325-356.
- Furgale P, Rehder J, Siegwart R. 2013. Unified temporal and spatial calibration for multi-sensor systems[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 3-7 November 2013, Tokyo, Japan. 1280-1286.
- Galvez-López D, Tardos J D. 2012. Bags of Binary Words for Fast Place Recognition in Image Sequences[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(5): 1188-1197.
- Gao Z, Ge M, Shen W, et al. 2017. Evaluation on the impact of IMU grades on BDS + GPS PPP/INS tightly coupled integration[J]. *Advances in Space Research*, 60(6): S0273117717304489.
- Gao Z, Zhang H, Ge M, et al. 2016. Tightly coupled integration of multi-GNSS PPP and MEMS inertial measurement unit data[J]. *GPS Solutions*, 21(2): 377-391.
- Gelb A. 1974. *Applied Optimal Estimation*[M]. Cambridge, MA, USA: The MIT Press: 160-165.
- Geng J. 2011. Rapid integer ambiguity resolution in GPS precise point positioning[D]. Nottingham: University of Nottingham.
- GLONASS ICD. 2008. GLONASS Interface Control Document: Navigational Radiosignal in Bands L1, L2.
- Godha S. 2006. Performance evaluation of low cost MEMS-based IMU integrated with GPS for land vehicle navigation application[D]. Calgary: The University of Calgary.
- Godha S, Cannon M E. 2007. GPS/MEMS INS integrated system for navigation in urban areas[J]. *GPS Solutions*, 11(3): 193-203.
- GPS ICD. 2013. Navstar GPS Space Segment/Navigation User Segment Interfaces.
- Grejner-Brzezinska D A, Da R, Toth C. 1998. GPS error modeling and OTF ambiguity resolution for high-accuracy GPS/INS integrated system[J]. *Journal of Geodesy*, 72(11): 626-638.
- Grejner-Brzezinska D A, Toth C K, Moore T, et al. 2016. Multisensor Navigation Systems: A Remedy for GNSS Vulnerabilities?[J]. *Proceedings of the IEEE*, 104(6): 1339-1353.
- Groves P D. 2013. *Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems*[M]. London: Artech House.
- Han H, Wang J, Wang J, et al. 2015. Performance Analysis on Carrier Phase-Based Tightly-Coupled GPS/BDS/INS Integration in GNSS Degraded and Denied Environments[J]. *Sensors*, 15(4): 8685-8711.
- Han S, Dai L, Rizos C. 1999. A New Data Processing Strategy for Combined GPS/GLONASS Carrier Phase-Based Positioning, September 14 - 17[C]. Nashville, TN, USA: 1619 - 1628.
- Hatch R. 1983. The synergism of GPS code and carrier measurements[C]//International geodetic symposium on satellite doppler positioning, 8-12 February, 1982, Las Cruces, New Mexico.1: 1213-1231.
- Hatch R. 1991. Ambiguity resolution while moving-experimental results[C]//Proceedings of the 4th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1991), September 11 - 13, 1991, Albuquerque, NM.91: 707-714.
- He H, Li J, Yang Y, et al. 2014. Performance assessment of single- and dual-frequency BeiDou/GPS single-epoch kinematic positioning[J]. *GPS Solutions*, 18(3): 393-403.
- He Y, Zhao J, Guo Y, et al. 2018. PL-VIO: Tightly-Coupled Monocular Visual-Inertial Odometry Using Point and Line Features[J]. *Sensors*, 18(4): 1159.
- Heo S, Jung J H, Park C G. 2018. Consistent EKF-Based Visual-Inertial Navigation Using Points and Lines[J]. *IEEE Sensors Journal*, 18(18): 7638-7649.



- Hernandez J, Tsotsos K, Soatto S. 2015. Observability, identifiability and sensitivity of vision-aided inertial navigation[C]//2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 26-30 May 2015, Seattle, WA, USA. 2319-2325.
- Hesch J A, Kottas D G, Bowman S L, et al. 2014. Consistency analysis and improvement of vision-aided inertial navigation[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(1): 158-176.
- Hewitson S, Wang J. 2007. Extended receiver autonomous integrity monitoring (eRAIM) for GNSS/INS integration[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 136(1): 13-22.
- Hide C, Moore T. 2005. GPS and Low Cost INS Integration for Positioning in the Urban Environment, September 13-16[C]. Long Beach, CA, USA: 1007-1015.
- Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Wasle E. 2007. GNSS—global navigation satellite systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more[M]. Springer Science & Business Media.
- Hong S, Lee M H, Chun H-H, et al. 2005. Observability of error states in GPS/INS integration[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 54(2): 731-743.
- Hu J S, Chen M Y. 2014. A sliding-window visual-IMU odometer based on tri-focal tensor geometry[C]//IEEE International Conference on Robotics & Automation (ICRA 2014), 31 May-7 June, 2014, Hong Kong, China. IEEE: 3963-3968.
- Huang G, Kaess M, Leonard J J. 2014. Towards consistent visual-inertial navigation[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2014), 31 May-7 June 2014, Hong Kong, China. IEEE: 4926-4933.
- Huang G P, Mourikis A I, Roumeliotis S I. 2008. Analysis and improvement of the consistency of extended Kalman filter based SLAM[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 19-23 May 2008, Pasadena, CA, USA. IEEE: 473-479.
- Huang G P, Mourikis A I, Roumeliotis S I. 2009. A First-Estimates Jacobian EKF for Improving SLAM Consistency[C]//International Symposium on Experimental Robotics, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg: 373-382.
- Huang G P, Mourikis A I, Roumeliotis S I. 2010. Observability-based Rules for Designing Consistent EKF SLAM Estimators[J]. *International Journal of Robotics Research*, 29(5): 502-528.
- Hwangbo M, Kim J-S, Kanade T. 2009. Inertial-aided KLT feature tracking for a moving camera[C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2009), October 10-15 2009, St. Louis, MO, USA. IEEE: 1909-1916.
- Indelman V, Williams S, Kaess M, et al. 2012. Factor graph based incremental smoothing in inertial navigation systems[C]//2012 15th International Conference on Information Fusion, 9-12 July 2012, Singapore, Singapore. 2154-2161.
- Indelman V, Williams S, Kaess M, et al. 2013. Information fusion in navigation systems via factor graph based incremental smoothing[J]. *Robotics & Autonomous Systems*, 61(8): 721-738.
- Jekeli C. 2012. Inertial navigation systems with geodetic applications[M]. Berlin, Germany: Walter de Gruyter.
- Jones E S, Soatto S. 2011. Visual-inertial navigation, mapping and localization: A scalable real-time causal approach[J]. *International Journal of Robotics Research*, 30(4): 407-430.
- Kümmerle R, Grisetti G, Strasdat H, et al. 2011. g2o: A general framework for graph optimization[C]//2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 9-13 May 2011, Shanghai, China. IEEE: 3607-3613.

- Kaess M, Johannsson H, Roberts R, et al. 2011. iSAM2: Incremental Smoothing and Mapping Using the Bayes Tree[J]. *International Journal of Robotics Research*, 31(2): 216-235.
- Kalman R E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems[J]. *Journal of Basic Engineering Transactions*, 82: 35-45.
- Kelly J, Sukhatme G S. 2011. Visual-inertial sensor fusion: Localization, mapping and sensor-to-sensor self-calibration[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 30(1): 56-79.
- Kim J, Sukkarieh S. 2005. 6DoF SLAM aided GPS/INS navigation in GPS denied and unknown environments[J]. *Journal of Global Positioning Systems*, 4(1): 120-128.
- Klein G, Murray D. 2007. Parallel tracking and mapping for small AR workspaces[C]//2007 6th IEEE and ACM International Symposium on Mixed and Augmented Reality, 13-16 Nov. 2007, Nara, Japan. IEEE: 225-234.
- Kleinert M, Schleith S. 2010. Inertial aided monocular SLAM for GPS-denied navigation[C]//2010 IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration, 5-7 Sept. 2010, Salt Lake City, UT, USA. 20-25.
- Kleusberg A, Teunissen P J G. 1996. GPS for Geodesy[M]. Berlin: Springer-Verlag.
- Knight D T. 1997. Rapid development of tightly-coupled GPS/INS systems[J]. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 12(2): 14-18.
- Kottas D G, Hesch J A, Bowman S L, et al. 2013. On the consistency of vision-aided inertial navigation[C]//Proceedings of the International Symposium on Experimental Robotics. Springer: 303-317.
- Kouba J, Héroux P. 2001. Precise Point Positioning Using IGS Orbit and Clock Products[J]. *GPS Solutions*, 5(2): 12-28.
- Kuang J, Niu X, Chen X. 2018. Robust Pedestrian Dead Reckoning Based on MEMS-IMU for Smartphones[J]. *Sensors*, 18(5): 1391.
- Landau H, Chen X, Klose S, et al. 2009. Trimble's RTK And DGPS Solutions in Comparison with Precise Point Positioning[C]//International Association of Geodesy Symposia, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg: 709-718.
- Langley R B. 1997. GPS Receiver System Noise[J]. *GPS World*, 8(6): 40-45.
- Lee H-K, Wang J, Rizos C. 2003. Effective cycle slip detection and identification for high precision GPS/INS integrated systems[J]. *The Journal of Navigation*, 56(3): 475-486.
- Lee H K, Wang J, Rizos C. 2005. An integer ambiguity resolution procedure for GPS/pseudolite/INS integration[J]. *Journal of Geodesy*, 79(4-5): 242-255.
- Leick A. 2004. GPS satellite surveying[M]. New York: John Wiley & Sons.
- Leutenegger S, Lynen S, Bosse M, et al. 2015. Keyframe-based visual-inertial odometry using nonlinear optimization[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 34(3): 314-334.
- Lewandowski W, Arias E F. 2011. GNSS times and UTC[J]. *Metrologia*, 48(4): 219-224.
- Li B, Shen Y, Xu P. 2008. Assessment of stochastic models for GPS measurements with different types of receivers[J]. *Chinese Science Bulletin*, 53(20): 3219-3225.
- Li M, Mourikis A I. 2012. Improving the accuracy of EKF-based visual-inertial odometry[C]//Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on, 14-18 May 2012, Saint Paul, MN, USA. IEEE: 828-835.
- Li M, Mourikis A I. 2013. High-precision, consistent EKF-based visual-inertial odometry[J]. *The International*

- Journal of Robotics Research, 32(6): 690-711.
- Li T, Zhang H, Gao Z, et al. 2018. High-accuracy positioning in urban environments using single-frequency multi-GNSS RTK/MEMS-IMU integration[J]. Remote Sensing, 10(2): 205.
- Li T, Zhang H, Gao Z, et al. 2019. Tight Fusion of a Monocular Camera, MEMS-IMU, and Single-Frequency Multi-GNSS RTK for Precise Navigation in GNSS-Challenged Environments[J]. Remote Sensing, 11(6): 610.
- Li T, Zhang H, Niu X, et al. 2017. Tightly-Coupled Integration of Multi-GNSS Single-Frequency RTK and MEMS-IMU for Enhanced Positioning Performance[J]. Sensors, 17(11): 2462.
- Liu H, Chen M, Zhang G, et al. 2018. ICE-BA: Incremental, Consistent and Efficient Bundle Adjustment for Visual-Inertial SLAM[C]//2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 18-23 June 2018, Salt Lake City, UT, USA. IEEE: 1974-1982.
- Lobo J, Dias J. 2007. Relative pose calibration between visual and inertial sensors[J]. The International Journal of Robotics Research, 26(6): 561-575.
- Lucas B D, Kanade T. 1981. An iterative image registration technique with an application to stereo vision[C]//the International Joint Conference on Artificial Intelligence, 24-28 August 1981, Vancouver, Canada. 121-130.
- Lupton T, Sukkarieh S. 2012. Visual-inertial-aided navigation for high-dynamic motion in built environments without initial conditions[J]. IEEE Transactions on Robotics, 28(1): 61-76.
- Lynen S, Achteik M W, Weiss S, et al. 2013. A robust and modular multi-sensor fusion approach applied to mav navigation[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 3-7 November 2013, Tokyo, Japan. IEEE: 3923-3929.
- Martinelli A. 2012. Vision and IMU Data Fusion: Closed-Form Solutions for Attitude, Speed, Absolute Scale, and Bias Determination[J]. IEEE Transactions on Robotics, 28(1): 44-60.
- Mascaro R, Teixeira L, Hinzmann T, et al. 2018. GOMSF: Graph-Optimization based Multi-Sensor Fusion for robust UAV pose estimation[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2018), 21-25 May 2018, Brisbane, Australia. IEEE: 1421-1428.
- Matthies L, Shafer S. 1987. Error modeling in stereo navigation[J]. IEEE Journal on Robotics and Automation, 3(3): 239-248.
- Maybeck P S. 1982. Stochastic models, estimation, and control[M]. New York: Academic Press.
- Melbourne W G. 1985. The case for ranging in GPS-based geodetic systems[C]//Proceedings of the first international symposium on precise positioning with the Global Positioning System. 1519.
- Merras M, Akkad N E, Saaidi A, et al. 2015. Camera Self Calibration with Varying Parameters by an Unknown Three Dimensional Scene Using the Improved Genetic Algorithm[J]. 3D Research, 6(1): 7.
- Meyer C D. 2000. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra[M]. Society for industrial and applied mathematics.
- Mirzaei F M, Roumeliotis S I. 2008. A Kalman filter-based algorithm for IMU-camera calibration: Observability analysis and performance evaluation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 24(5): 1143-1156.
- Monikes R, Teltschik A, Wendel J, et al. 2006. Post-processing GNSS/INS measurements using a tightly coupled fixed-interval smoother performing carrier phase ambiguity resolution[C]//IEEE Position, Location, and Navigation Symposium, 25-27 April, Coronado, CA, USA. 283-290.
- Montenbruck O, Steigenberger P, Khachikyan R, et al. 2014. IGS-MGEX: preparing the ground for multi-constellation GNSS science[J]. Inside GNSS, 9(1): 42-49.

- Moravec H P. 1980. obstacle avoidance and navigation in the real world by a seeing robot rover[D]. Stanford, CA: Stanford University.
- Mourikis A I, Roumeliotis S I. 2007. A multi-state constraint Kalman filter for vision-aided inertial navigation[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 10-14 April 2007, Roma, Italy. IEEE: 3565-3572.
- Mur-Artal R, Montiel J M M, Tardos J D. 2015. ORB-SLAM: a versatile and accurate monocular SLAM system[J]. IEEE Transactions on Robotics, 31(5): 1147-1163.
- Mur-Artal R, Tardos J D. 2016. Visual-Inertial Monocular SLAM with Map Reuse[J]. IEEE Robotics & Automation Letters, 2(2): 796-803.
- Nassar S, El-Sheimy N. 2005. Wavelet analysis for improving INS and INS/DGPS navigation accuracy[J]. Journal of Navigation, 58(01): 119-134.
- Newcombe R A, Lovegrove S J, Davison A J. 2011. DTAM: Dense tracking and mapping in real-time[C]//2011 International Conference on Computer Vision, 6-13 Nov. 2011, Barcelona, Spain. IEEE: 2320-2327.
- Nister D, Naroditsky O, Bergen J. 2004. Visual odometry[C]//Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2004. CVPR 2004., 27 June-2 July 2004, Washington, DC, USA. IEEE,1: I-I.
- Niu X, Zhang Q, Gong L, et al. 2015. Development and evaluation of GNSS/INS data processing software for position and orientation systems[J]. Survey Review, 47: 87-98.
- Odolinski R, Teunissen P J G. 2016. Single-frequency, dual-GNSS versus dual-frequency, single-GNSS: a low-cost and high-grade receivers GPS-BDS RTK analysis[J]. Journal of Geodesy, 90(11): 1255-1278.
- Odolinski R, Teunissen P J G. 2017. Low-cost, high-precision, single-frequency GPS-BDS RTK positioning[J]. GPS Solutions, 21(3): 1315-1330.
- Odolinski R, Teunissen P J G, Odijk D. 2014. Combined BDS, Galileo, QZSS and GPS single-frequency RTK[J]. GPS Solutions, 19(1): 151-163.
- Olson C F, Matthies L H, Schoppers H, et al. 2000. Robust stereo ego-motion for long distance navigation[C]//Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2000) 15-15 June 2000.2: 453-458 vol.452.
- Parkinson B W, Spilker J J. 1996. The global positioning system theory and applications[M]. Washington, DC: AIAA.
- Petovello M, Cannon M, Lachapelle G. 2004. Benefits of Using a Tactical - Grade IMU for High - Accuracy Positioning[J]. Navigation, 51(1): 1-12.
- Petovello M G. 2003. Real-time integration of a tactical-grade IMU and GPS for high-accuracy positioning and navigation[D]. Canada: The University of Calgary.
- Qin T, Cao S, Pan J, et al. 2019. A General Optimization-based Framework for Global Pose Estimation with Multiple Sensors.
- Qin T, Li P, Shen S. 2018. VINS-Mono: A Robust and Versatile Monocular Visual-Inertial State Estimator[J]. IEEE Transactions on Robotics, 34(4): 1004-1020.
- Rauch H E, Striebel C T, Tung F. 1965. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems[J]. AIAA Journal, 3(8): 1445-1450.
- Rosten E, Porter R, Drummond T. 2010. Faster and Better: A Machine Learning Approach to Corner Detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 32(1): 105-119.

- Roumeliotis S I, Johnson A E, Montgomery J F. 2002. Augmenting inertial navigation with image-based motion estimation[C]//Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 11-15 May 2002, Washington, DC, USA. IEEE,4: 4326-4333.
- Rublee E, Rabaud V, Konolige K, et al. 2011. ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF[C]//2011 International Conference on Computer Vision, 6-13 Nov. 2011, Barcelona, Spain. IEEE: 2564-2571.
- Saastamoinen J H. 1972. Atmospheric Correction for the Troposphere and the Stratosphere in Radio Ranging Satellites[J]. *Use of Artificial Satellites for Geodesy*, 15(6): 247-251.
- Savage P G. 2000. Strapdown analytics[M]. Maple Plain, MN, USA: Strapdown Associates.
- Scaramuzza D, Fraundorfer F. 2011. Visual Odometry : Part I: The First 30 Years and Fundamentals[J]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 18(4): 80-92.
- Scherzinger B M. 2000. Precise robust positioning with inertial/GPS RTK[C]//Proceedings of the 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2000), September 19 - 22, 2000, Salt Lake City, UT, USA. 155-162.
- Scherzinger B M. 2002. Robust Positioning with Single Frequency Inertially Aided RTK, January 28 - 30[C]. San Diego, CA, USA: 911 - 917.
- Schneider T, Dymczyk M, Fehr M, et al. 2018. Maplab: An Open Framework for Research in Visual-Inertial Mapping and Localization[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(3): 1418-1425.
- Shen S, Michael N, Kumar V. 2015. Tightly-coupled monocular visual-inertial fusion for autonomous flight of rotorcraft MAVs[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2015), 26-30 May 2015, Seattle, WA, USA. IEEE: 5303-5310.
- Shepard D P, Humphreys T E. 2014. High-precision globally-referenced position and attitude via a fusion of visual SLAM, carrier-phase-based GPS, and inertial measurements[C]//IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014, 5-8 May 2014, Monterey, CA, USA. IEEE: 1309-1328.
- Shi C, Yi W, Song W, et al. 2013. GLONASS pseudorange inter-channel biases and their effects on combined GPS/GLONASS precise point positioning[J]. *GPS Solutions*, 17(4): 439-451.
- Shi J, Tomasi C. 1994. Good Features to Track[C]//Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 21-23 June 1994, Seattle, WA, USA. 593-600.
- Shin E-H. 2005. Estimation techniques for low-cost inertial navigation[D]. Calgary: The University of Calgary.
- Sibley G, Matthies L, Sukhatme G. 2010. Sliding window filter with application to planetary landing[J]. *Journal of Field Robotics*, 27(5): 587-608.
- Skaloud J. 1998. Reducing the GPS ambiguity search space by including inertial data[C]//Proceedings of the 11th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1998), 15-18 September, Nashville, TN, USA. 2073-2080.
- Strasdat H, Montiel J M M, Davison A J. 2012. Visual SLAM: Why filter? [J]. *Image & Vision Computing*, 30(2): 65-77.
- Takasu T, Yasuda A. 2010. Kalman-Filter-Based Integer Ambiguity Resolution Strategy for Long-Baseline RTK with Ionosphere and Troposphere Estimation[C]//Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (Ion Gnss 2010), September 21 - 24 2010, Portland, OR, USA.7672: 161-171.
- Tanskanen P, Naegeli T, Pollefeys M, et al. 2015. Semi-direct EKF-based monocular visual-inertial odometry[C]//2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 28

- Sept.-2 Oct. 2015, Hamburg, Germany. IEEE: 6073-6078.
- Tardif J, George M, Laverne M, et al. 2010. A new approach to vision-aided inertial navigation[C]//2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 18-22 Oct 2010, Taipei, Taiwan. 4161-4168.
- Teunissen P J, Odijk D. 1997. Ambiguity dilution of precision: definition, properties and application[C]//Proceedings of ION-GPS-97, 16-19 September 1997, Kansas City, MO, USA. 891-899.
- Teunissen P J G. 1990. Quality control in integrated navigation systems[C]//IEEE Symposium on Position Location and Navigation, 20-20 March, Las Vegas, NV, USA. 158-165.
- Teunissen P J G. 1995. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 70(1-2): 65-82.
- Teunissen P J G, Odolinski R, Odijk D. 2013. Instantaneous BeiDou+GPS RTK positioning with high cut-off elevation angles[J]. *Journal of Geodesy*, 88(4): 335-350.
- Tian Y, Ge M, Neitzel F. 2015. Particle filter-based estimation of inter-frequency phase bias for real-time GLONASS integer ambiguity resolution[J]. *Journal of Geodesy*, 89(11): 1145-1158.
- Titterton D H, Weston J L. 2004. Strapdown inertial navigation technology[M]. Institution of Electrical Engineers.
- Trawny N, Mourikis A I, Roumeliotis S I, et al. 2007. Vision - aided inertial navigation for pin - point landing using observations of mapped landmarks[J]. *Journal of Field Robotics*, 24(5): 357-378.
- Triggs B, McLauchlan P F, Hartley R I, et al. 2000. Bundle Adjustment — A Modern Synthesis[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Tsai R. 1987. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses[J]. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(4): 323-344.
- Verhagen S, Odijk D. 2007. Reliable Multi-Carrier Ambiguity Resolution in the Presence of Multipath[C]//Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007), September 25 - 28, 2007, Fort Worth, TX. 339 - 350.
- Verhagen S, Teunissen P J G, Odijk D. 2012. The Future of Single-Frequency Integer Ambiguity Resolution[C]//International Association of Geodesy Symposia, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg: 33-38.
- Vermeer M. 1997. The precision of geodetic GPS and one way of improving it[J]. *Journal of Geodesy*, 71(4): 240-245.
- Veth M, Raquet J, Pachter M. 2006. Stochastic constraints for efficient image correspondence search[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 42(3): 973-982.
- Vu A, Ramanandan A, Chen A, et al. 2012. Real-time computer vision/DGPS-aided inertial navigation system for lane-level vehicle navigation[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 13(2): 899-913.
- Wübbena G. 1985. Software developments for geodetic positioning with GPS using TI-4100 code and carrier measurements[C]//Proceedings of the first international symposium on precise positioning with the global positioning system.
- Wang J. 2000. An approach to GLONASS ambiguity resolution[J]. *Journal of Geodesy*, 74(5): 421-430.
- Wanninger L. 2012. Carrier-phase inter-frequency biases of GLONASS receivers[J]. *Journal of Geodesy*, 86(2): 139-148.
- Wanninger L, Wallstab-Freitag S. 2007. Combined Processing of GPS, GLONASS, and SBAS Code Phase and

- Carrier Phase Measurements, September 25 - 28[C]. Fort Worth, TX, USA: 866-875.
- Wei M, Schwarz K P. 1990. A Strapdown Inertial Algorithm Using an Earth-Fixed Cartesian Frame[J]. *Navigation*, 37(2): 153-167.
- Wendel J, Trommer G F. 2004. Tightly coupled GPS/INS integration for missile applications[J]. *Aerospace Science & Technology*, 8(7): 627-634.
- Witchayangkoon B. 2000. Elements of GPS precise point positioning[D]. U.S: The Univeristy of Maine.
- Won D H, Lee E, Heo M, et al. 2014. Selective Integration of GNSS, Vision Sensor, and INS Using Weighted DOP Under GNSS-Challenged Environments[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 63(9): 2288-2298.
- Wu A D, Johnson E N, Proctor A A. 2005. Vision-aided inertial navigation for flight control[J]. *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication*, 2(9): 348-360.
- Wu K, Ahmed A, Georgiou G, et al. 2015. A Square Root Inverse Filter for Efficient Vision-aided Inertial Navigation on Mobile Devices[C]//*Robotics: Science and Systems*, 13-17 July 2015, Rome, Italy.
- Yang Y, Song L, Xu T. 2002. Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights[J]. *Journal of Geodesy*, 76(6): 353-358.
- Zhang T, Wu K, Song J, et al. 2017. Convergence and Consistency Analysis for a 3-D Invariant-EKF SLAM[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2(2): 733-740.
- Zhang Z. 1999. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations[C]//*The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision*, 20-27 September, Kerkyra, Greece. IEEE,1: 666-673.
- Zhao S, Chen Y, Farrell J A. 2016. High-Precision Vehicle Navigation in Urban Environments Using an MEM's IMU and Single-Frequency GPS Receiver[J]. *Ieee Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(10): 2854-2867.
- Zhao S H, Cui X W, Guan F, et al. 2014. A Kalman Filter-Based Short Baseline RTK Algorithm for Single-Frequency Combination of GPS and BDS[J]. *Sensors*, 14(8): 15415-15433.
- Zheng F, Tsai G, Zhang Z, et al. 2018. PI-VIO: Robust and Efficient Stereo Visual Inertial Odometry using Points and Lines.

## 攻博期间的主要科研成果

### 第一作者论文

**Li, T.**; Zhang, H.; Gao, Z.; Niu, X.; El-sheimy, N. Tight Fusion of a Monocular Camera, MEMS-IMU, and Single-Frequency Multi-GNSS RTK for Precise Navigation in GNSS-Challenged Environments. *Remote Sens.* 2019, 11, 610. (IF:3.406, SCI 二区, 被引 1 次)

**Li, T.**; Zhang, H.; Gao, Z.; Chen, Q.; Niu, X. High-Accuracy Positioning in Urban Environments Using Single-Frequency Multi-GNSS RTK/MEMS-IMU Integration. *Remote Sens.* 2018, 10, 205. (IF:3.406, SCI 二区, 被引 14 次)

**Li, T.**; Zhang, H.; Niu, X.; Gao, Z. Tightly-Coupled Integration of Multi-GNSS Single-Frequency RTK and MEMS-IMU for Enhanced Positioning Performance. *Sensors* 2017, 17, 2462. (IF:2.475, SCI 三区, 被引 7 次)

**李团**, 章红平, 牛小骥, 张全. RTK/INS 紧组合算法在卫星数不足情况下的性能分析. *武汉大学学报·信息科学版*, 2018, 43(3): 478-484. (EI)

### 主要参与的科研项目

国家重点研发计划“协同精密定位”项目子课题多源融合高精度定位技术

### 主要获奖

2018 年博士研究生国家奖学金

### 研究成果转化

商用高精度组合导航数据处理软件 GINS: PPK 和 PPK/INS 紧组合数据处理模块





## 致谢

光阴似箭，日月如梭，珞珈求学近十载，六年的硕博生涯也即将画上句号。在博士论文完成之际，谨向所有给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和亲人表示最真诚地感谢和最美好地祝福！

首先，衷心地感谢两位恩师章红平教授和牛小骥教授！章老师平易近人、知识渊博、视野开阔，在本文的选题、研究和撰写方面，章老师都给予了悉心的指导。课题研究过程中，章老师给了我充分的自由和空间去探索和尝试，每次与他讨论问题都能从中得到启发，章老师也经常教导我去抓问题的本质。牛老师博学和蔼，思维敏锐，科研作风严谨，工作兢兢业业，让我深深地折服，博士论文的写作和修改也都浸润着牛老师辛勤的汗水。从大学四年级进入组合导航课题组以来已有 7 年时光，两位恩师在做人和做研究方面的言传身教使我得到更好地成长，在此深深地祝福两位恩师身体健康，家庭幸福，万事如意！

特别感谢硕士研究生阶段的导师刘经南院士，刘老师敏锐的洞察力和对科学问题的前瞻性思考一直深深地影响着我，每次聆听刘老师对学生开题报告和学术报告的点评，我都会深受启发。

感谢在卡尔加里大学联合培养期间的导师 Naser El-sheimy 教授提供的指导和帮助，每次和他的交流和讨论都使我获益匪浅。

感谢 GNSS 中心的唐卫明教授在博士开题时给予的宝贵建议，唐老师在网络 RTK 算法理论和软件研发方面取得了非常丰富的研究成果，本文最初的研究也源于唐老师无私给予的 RTK 算法源代码。

感谢学术氛围自由与浓厚的智能多源融合导航研究团队对我工作的帮助和支持，能够在这个团队中学习是我的幸运，衷心地祝福团队不断发展壮大，在学术研究上取得更丰硕的成果！

感谢师兄高周正博士、张全博士和陈起金博士，他们在组合导航理论和论文写作方面给了我诸多指导和帮助。感谢师兄张提升副教授对我博士论文撰写提出的宝贵建议。几位师兄为人谦逊，勤奋踏实，是我学习的榜样，能与他们结识是我一生的宝贵财富。

感谢武汉大学测绘学院和 GNSS 中心传授我知识的所有专业课老师，以及给我提供帮助和支持的所有行政老师。

感谢在武汉大学求学期间结缘的各位朋友对我的关心、帮助和支持，衷心地祝福你们前程似锦，生活幸福！

最后，感谢我的父母和家人，你们无条件的鼓励和支持是我前进道路上最坚强的后盾，我爱你们！谨以此文献给你们！

2019 年 5 月 25 日 于武汉大学图书馆