文章编号：1005-6734(2026)10-1024-09 doi.10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2026.10.009

面向多重叠延时观测的实时滤波更新方法

王立强，向治宇，张提升，牛小骥
（武汉大学卫星导航定位技术研究中心，武汉 430072）

摘要：多传感器组合导航系统中，实时卡尔曼滤波的延时观测更新算法通常假设延时期间系统不发生任何状态更新，因此无法处理多个重叠延时观测。针对这一问题，提出一种面向多重叠延时观测的实时滤波更新方法：首先推导两个重叠延时观测的更新方法，采用现有方法对先到达的观测执行延时更新；对后到达的观测建立两阶段更新模型：在先到达观测的更新时刻对其观测信息进行更新，再将更新后的状态传播至当前时刻。进一步地，提出面向多个重叠延时观测的基于分段窗口的联合更新策略，将窗口内所有观测的到达时刻统一映射至窗口末端，并在该处构建联合观测方程执行一次延时更新，从而避免中间更新破坏重叠延时期间状态传播的一致性。在约 30 min 的车载全球导航卫星系统/惯性导航系统（GNSS/INS）数据上对所提方法进行测试，并模拟位置、速度和航向观测在 0.05~0.25 s 随机延时下相互重叠的场景。观测中断测试表明，考虑延时期间发生的其他观测更新是必要的；综合精度测试表明，所提方法处理位置、速度和航向三个重叠延时观测时的水平位置、高程和航向误差均方根分别为 0.149 m、0.132 m 和 0.030°，接近无延时滤波的 0.133 m、0.119 m 和 0.031°。

关 键 词：延时观测更新；Kalman 滤波；组合导航；多传感器融合
中图分类号：U666.1; V249.3 **文献标志码：**A

Real-time Kalman filter update method for multiple overlapping delayed measurements

WANG Liqiang, XIANG Zhiyu, ZHANG Tisheng, NIU Xiaoji
(GNSS Research Center of Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In Kalman filter-based multi-sensor integrated navigation, delayed measurement updates are essential for real-time estimation accuracy, as time inconsistency between measurement sampling and state update degrades the navigation solution. However, conventional transition-matrix-based delay compensation assumes that no filter update occurs during the delay interval, which fails to handle multiple overlapping delayed measurements. To address this problem, a real-time filtering update method for multiple overlapping delayed measurements is proposed. Specifically, a two-step update method is first derived for two overlapping delayed measurements: the earlier-arriving measurement is updated using the conventional delayed measurement update, while for the later-arriving measurement, its measurement information is first updated at the update epoch of the earlier-arriving measurement and then propagated to the current epoch. Furthermore, a segmented-window-based joint update strategy is proposed for multiple overlapping delayed measurements, in which all measurements within the window are mapped to the window end and jointly processed through a single update via a stacked measurement equation, thereby preventing intermediate updates from breaking state-propagation consistency over the overlapping delay interval. The proposed methods are tested on approximately 30 min of vehicle-borne Global Navigation Satellite System (GNSS)/Inertial Navigation System (INS) data, with simulated random delays of 0.05~0.25 s applied to overlapping position, velocity, and heading measurements.

收稿日期：2026-07-03；**修回日期：**2026-08-29
基金项目：国家自然科学基金面上项目（42374034）
作者简介：王立强（1997—），男，博士研究生，从事组合导航研究。
通讯作者：牛小骥（1973—），男，教授，博士生导师，从事惯性导航、组合导航研究。

Measurement-outage tests demonstrate the necessity of accounting for other updates during the delay interval. Comprehensive accuracy tests show that the proposed window method achieves RMS errors of 0.149 m, 0.132 m, and 0.030° in horizontal position, height, and heading, respectively, which are close to the corresponding zero-delay results of 0.133 m, 0.119 m, and 0.031°.

Key words: delayed measurement update; Kalman filter; integrated navigation; multi-sensor fusion

全球导航卫星系统（Global Navigation Satellite System, GNSS）/惯性导航系统（Inertial Navigation System, INS）组合是实现车辆连续、可靠导航最常用的方法之一[1,2]：GNSS 提供全球参考框架下的绝对观测，INS 则在 GNSS 失锁或性能下降期间维持高频运动递推。然而在实际的实时多传感器系统中，受传感器处理、通信传输与滤波计算调度等因素影响[3]，GNSS 定位结果，以及视觉里程计、轮速里程计、磁力计等辅助传感器提供的速度、航向观测，通常晚于其采样时刻到达滤波器[4]。若直接用此类延时观测更新当前导航状态，所得观测新息在时间上不一致，会降低导航定位精度[5,6]。因此，对于不回溯历史数据、按观测到达顺序在线处理的实时组合导航系统，延时观测更新对保持定位精度和实时性至关重要。

延时观测处理在实时 GNSS/INS 组合中已有相关研究。Solomon 等[5]研究了实时 GNSS/INS 组合导航中的延时与补偿问题，指出若不进行恰当补偿，GNSS 数据延时会显著降低导航滤波性能，并提出了实时延时估计与延时观测的扩展卡尔曼滤波补偿策略。Yang 等[7]分析了时间延时对 GNSS/INS 组合导航的影响，表明时间同步误差会显著影响卡尔曼滤波新息，甚至改变松组合与紧组合之间的相对性能。文献[8]针对 GNSS/INS 紧组合的实时实现问题，在完成延时更新后将延时误差状态估计及其协方差传递至当前时刻，从而在嵌入式平台上降低输出延时并保持导航精度。此外，延时观测与乱序观测（Out-of-Sequence Measurement, OOSM）处理在卡尔曼滤波理论中也得到广泛研究，如文献[9]在观测模型及协方差估计中显式考虑传感器时延，以降低异步传感器观测对姿态估计精度的影响。

尽管上述研究为延时观测处理奠定了重要基础，但其大多针对单个延时观测、延时估计、前后向状态修正或一般 OOSM 滤波理论。而在基于 GNSS/INS 组合的实时多源融合系统中，除 GNSS 位置观测外，还可能接入视觉里程计或轮速里程计提供的载体速度[10-12]、磁力计提供的载体航向等辅助观测[13]。这些观测具有不同的采样时刻与处理延时，使其延时区间可能相互重叠。当某个观测的延时区间内发生了另一次卡尔曼滤波更新时，其采样时刻与到达时刻之间的误差状态传播会被该次更新及状态反馈打断，此时现有基于状态转移矩阵的延时更新方法所依赖的连续传播条件不再成立，该方法便不再直接适用。这一涉及多重叠延时观测的实际问题尚未得到充分研究。

针对上述问题，本文提出一种面向多个重叠延时观测的实时卡尔曼滤波更新策略。首先分析两个重叠延时观测的情形，提出两阶段更新策略：在采用现有状态转移矩阵方法完成第一个延时观测更新后，将第二个观测先更新至第一个观测的到达时刻，再传播至其自身到达时刻进行状态反馈。针对存在多个重叠延时观测的更复杂多传感器场景，进一步提出基于分段窗口的联合更新策略：将窗口内到达的观测在窗口末端统一处理，从而避免中间更新打断状态传播的连续性，并降低与具体情形相关的实现复杂度。基于车载 GNSS/INS 实测数据并人为注入随机延时的测试表明，在亚秒级短延时条件下，所提方法能够正确处理多个重叠延时观测，获得接近无延时滤波的导航定位精度；观测中断测试进一步表明，在观测恢复阶段考虑延时区间内发生的其他观测更新是必要的。

1　GNSS/INS 延时更新模型

1.1　基于 Kalman 滤波的 GNSS/INS 组合导航

GNSS/INS 组合导航系统通常由惯性导航机械编排算法与基于误差状态的测量融合两部分构成。惯性导航机械编排利用惯性测量值（比力与角速度）及前一时刻的导航状态（位置、速度与姿态），递推当前时刻的导航状态。连续时间惯性导航机械编排微分方程可表示为[1,14]：

$$\begin{cases} \dot{\varphi}=\dfrac{v_N^n}{R_M+h},\ \dot{\lambda}=\dfrac{v_E^n}{(R_N+h)\cos\varphi},\ \dot{h}=-v_D^n \\ \dot{\boldsymbol{v}}_{eb}^n=\boldsymbol{R}_b^n\boldsymbol{f}_{ib}^b-\left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\boldsymbol{v}_{eb}^n+\boldsymbol{g}_p^n \\ \dot{\boldsymbol{R}}_b^n=\boldsymbol{R}_b^n\left[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\right]_\times=\boldsymbol{R}_b^n\left[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right]_\times-\left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right]_\times\boldsymbol{R}_b^n \end{cases} \tag{1}$$

其中，$[\varphi\quad\lambda\quad h]$ 分别表示载体的纬度、经度与椭球高，用以描述载体的地理位置；$\boldsymbol{v}_{eb}^n=[v_N^n\quad v_E^n\quad v_D^n]^{\mathrm{T}}$ 为载体在导航坐标系（n 系）下的地速；$\boldsymbol{R}_b^n$ 为载体的姿态矩阵；$\boldsymbol{f}_{ib}^b$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 分别为比力和角速度；$\boldsymbol{g}_p^n$ 为当地重力矢量；R_M 和 R_N 分别为子午圈半径和卯酉圈半径；$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$、$\boldsymbol{\omega}_{en}^n$、$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$ 分别为地球自转角速度、位移角速度及载体相对 n 系的角速度。

由于惯性导航方程具有很强的非线性，GNSS/INS

组合通常采用扩展卡尔曼滤波或误差状态卡尔曼滤波实现。在误差状态形式下，滤波系统状态向量由导航状态误差与惯性测量装置（Inertial Measurement Unit, IMU）零偏误差构成，误差状态向量可写为：

$$\delta \boldsymbol{x}_k = \left[\left(\delta \boldsymbol{r}_k^n\right)^{\mathrm{T}} \quad \left(\delta \boldsymbol{v}_{eb,k}^n\right)^{\mathrm{T}} \quad \left(\boldsymbol{\phi}_k\right)^{\mathrm{T}} \quad \left(\delta \boldsymbol{b}_{g,k}\right)^{\mathrm{T}} \quad \left(\delta \boldsymbol{b}_{a,k}\right)^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

其中，$\delta \boldsymbol{r}_k^n$ 、$\delta \boldsymbol{v}_{eb,k}^n$ 和 $\boldsymbol{\phi}_k$ 分别为 k 时刻 n 系下的位置误差、速度误差和姿态误差，$\delta \boldsymbol{b}_{g,k}$ 和 $\delta \boldsymbol{b}_{a,k}$ 分别为陀螺仪零偏误差和加速度计零偏误差。

对惯性导航机械编排微分方程进行误差扰动，并结合误差状态的微分方程，得到连续形式误差状态微分方程：

$$\begin{cases} \delta \dot{\boldsymbol{r}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \delta \boldsymbol{r}^n - \boldsymbol{v}_{eb}^n \times \delta \boldsymbol{\theta} + \delta \boldsymbol{v}_{eb}^n \\ \delta \dot{\boldsymbol{v}}_{eb}^n = \boldsymbol{R}_b^n \delta \boldsymbol{f}_{ib}^b + \left(\boldsymbol{R}_b^n \boldsymbol{f}_{ib}^b\right) \times \boldsymbol{\phi} - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \delta \boldsymbol{v}_{eb}^n + \\ \qquad \boldsymbol{v}_{eb}^n \times \left(2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) + \delta \boldsymbol{g}_p^n \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \boldsymbol{R}_b^n \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{cases} \tag{3}$$

其中，$\delta \boldsymbol{\theta}$ 为由位置误差引起的 n 系方向误差[14]，$\delta(\cdot)$ 表示对应参数的误差状态。

将IMU零偏误差建模为一阶高斯-马尔可夫过程，则其对应误差状态的微分方程可表示为：

$$\begin{cases} \delta \dot{\boldsymbol{b}}_g = -\dfrac{1}{T_{gb}} \delta \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{w}_{gb} \\ \delta \dot{\boldsymbol{b}}_a = -\dfrac{1}{T_{ab}} \delta \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{w}_{ab} \end{cases} \tag{4}$$

其中，T_{gb} 、T_{ab} 表示相关时间，$\boldsymbol{w}_{gb}$ 、$\boldsymbol{w}_{ab}$ 表示驱动噪声。

根据误差微分方程可得连续形式的状态转移矩阵，经离散化后得到离散状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$ ，进而可用于 $k-1$ 时刻系统误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_{k-1}$ 与协方差 $\boldsymbol{P}_{k-1}$ 的传播：

$$\delta \boldsymbol{x}_{k/k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1} \delta \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{P}_{k/k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1} \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k-1} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{w}_{k-1}$ 为离散过程噪声，$\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 为过程噪声对应的协方差；$\delta \boldsymbol{x}_{k/k-1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{k/k-1}$ 为预测的 k 时刻系统误差状态和协方差。

当观测信息到达时，利用当前时刻的导航状态计算观测新息，并在标称导航状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 附近线性化得到观测模型：

$$\delta \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) - \tilde{\boldsymbol{z}}_k \approx \boldsymbol{H}_k \delta \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{n}_k \tag{7}$$

其中，$\delta \boldsymbol{z}_k$ 为观测新息；$\tilde{\boldsymbol{z}}_k$ 为观测信息的测量值，$\boldsymbol{h}(\cdot)$ 为其观测方程；$\boldsymbol{H}_k$ 为观测矩阵；$\boldsymbol{n}_k$ 为观测噪声，对应的协方差记为 $\boldsymbol{R}_k$ 。

使用标准卡尔曼滤波更新方程对系统误差状态和协方差进行更新[1]：

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{x}_k = \delta \boldsymbol{x}_{k/k-1} + \boldsymbol{K}_k \delta \boldsymbol{z}_k \\ \boldsymbol{P}_k = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{P}_{k/k-1} \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k/k-1} \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_{k/k-1} \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1} \end{cases} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{K}_k$ 为卡尔曼增益。

最后将估计的误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_k$ 反馈至当前标称导航状态，并将系统误差状态置零。

1.2 延时观测更新

在实时 GNSS/INS 组合导航系统中，由于不同传感器具有不同的处理与通信延时，观测信息普遍会延时到达，即观测信息 $\boldsymbol{z}_1$ 在 t_{s1} 时刻采样、在 t_{a1} 时刻被组合系统接收，且 $t_{a1} > t_{s1}$ 。若直接用该观测更新 t_{a1} 时刻的系统状态，观测信息与当前导航状态之间的时间不一致会导致导航精度下降。

基于状态转移矩阵的延时观测更新方法，可解决观测延时导致的时间不一致、导航精度下降问题。具体而言，在实时递推过程中缓存采样时刻的导航状态与延时期间的状态转移矩阵。当延时观测到达时，首先在采样时刻利用缓存的导航状态与观测信息，对 t_{s1} 时刻的系统误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_{s1}$ 构建观测模型：

$$\delta \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{h}_1(\hat{\boldsymbol{x}}_{s1}) - \tilde{\boldsymbol{z}}_1 \approx \boldsymbol{H}_1 \delta \boldsymbol{x}_{s1} + \boldsymbol{n}_1 \tag{9}$$

其中，$\delta \boldsymbol{z}_1$ 为观测新息；$\tilde{\boldsymbol{z}}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_1(\cdot)$ 为观测信息 $\boldsymbol{z}_1$ 的测量值和观测方程；$\boldsymbol{H}_1$ 为利用 $\tilde{\boldsymbol{z}}_1$ 和 t_{s1} 时刻的标称导航状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_{s1}$ 得到的观测矩阵；$\boldsymbol{n}_1$ 为观测噪声。

然后利用缓存的延时期间的状态转移矩阵，并忽略状态传播中的随机噪声，建立系统误差状态在采样时刻 t_{s1} 与到达时刻 t_{a1} 之间的转换关系[8,12]：

$$\delta \boldsymbol{x}_{a1} = \boldsymbol{\Phi}_{a1/s1} \delta \boldsymbol{x}_{s1} \tag{10}$$

其中，$\delta \boldsymbol{x}_{a1}$ 为 t_{a1} 时刻的系统误差状态，$\boldsymbol{\Phi}_{a1/s1}$ 表示 t_{s1} 到 t_{a1} 时刻的系统状态转移矩阵。

将式(10)代入式(9)，即可获得延时观测信息对当前时刻系统状态的观测模型：

$$\delta \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{\Phi}_{a1/s1}^{-1} \delta \boldsymbol{x}_{a1} + \boldsymbol{n}_1 \tag{11}$$

基于该延时观测模型，按标准卡尔曼滤波对当前时刻的系统误差状态及协方差进行更新，并将估计的误差状态反馈至当前标称导航状态。这种延时观测更新方法能够在观测信息的正确采样时刻构建观测模型，并在保证实时性的同时正确修正当前时刻的导航状态。

需要注意的是，式(10)中的 $\boldsymbol{\Phi}_{a1/s1}$ 是由 t_{s1} 至 t_{a1} 时刻间所有 IMU 历元对应的离散状态转移矩阵连乘得到的，能够反映延时期间载体的动态变化。然而，随着传播区间增大，局部线性化与离散化误差的影响会逐渐增强，因此式(10)所建立的状态转换关系仅适用于亚秒级短延时。本文所提算法及后续实验测试均在此

条件下开展。

2　重叠延时观测更新方法

上述延时观测更新方法成立的前提是：观测信息采样时刻与到达时刻的系统误差状态可通过状态转移矩阵关联。这就要求在区间$[t_{s1}\quad t_{a1}]$内，误差状态的传播保持连续，即不发生其他观测更新或系统误差状态重置。然而在多传感器融合系统中，多个延时观测的采样与到达时间区间往往相互重叠。若在当前观测的等待区间内，另一延时观测被更新并导致系统误差状态与协方差发生改变，则当前观测所依赖的连续传播条件将被破坏，1.2 节给出的延时更新模型将不再直接适用。为解决该问题，本节首先分析两个重叠观测的延时更新方法，随后将其推广至多个重叠延时观测的情形。

为区分重叠延时观测处理过程中观测信息吸收的不同阶段，本文采用右上标(j)标记相应的状态量，其中(0)表示当前延时观测组处理前的状态，(j)表示已包含当前观测组中j个观测信息后的估计结果。

2.1　两个重叠延时观测的更新

对于两个延时观测z_1与z_2，其采样时刻和到达时刻分别表示为t_{s1}、t_{a1}和t_{s2}、t_{a2}。不失一般性地，假设观测信息z_1早于观测信息z_2到达，即$t_{a1}<t_{a2}$，且$t_{s2}<t_{a1}$，即z_2的等待区间$[t_{s2}\quad t_{a2}]$内包含z_1在t_{a1}时刻的观测更新，如图 1 所示。

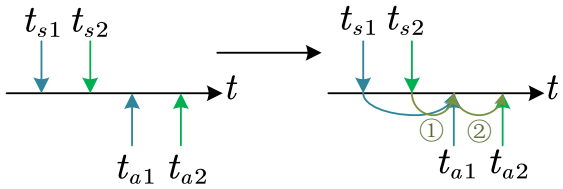


图 1　两个重叠延时观测的时间关系

Fig.1　Temporal relationship between two overlapping delayed measurements

当观测z_1到达时，其等待区间内尚无其他更新，故z_1可按 1.2 节所述的延时观测更新方法处理。记t_{a1}处z_1更新前的系统误差状态和协方差分别为$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(0)}$和$\boldsymbol{P}_{a1}^{(0)}$，则$z_1$更新后的系统误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}$和协方差$\boldsymbol{P}_{a1}^{(1)}$可表示为：

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}=\boldsymbol{K}_1\delta z_1\\ \boldsymbol{P}_{a1}^{(1)}=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{H}_{1,d}\right)\boldsymbol{P}_{a1}^{(0)}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{H}_{1,d}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{H}_{1,d}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}_{a1/s1}^{-1}$为$z_1$在$t_{a1}$时刻的等效观测矩阵；$z_1$更新前先验误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(0)}$为 0，故可从式(12)中略去此项。将估计的系统误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}$反馈至$t_{a1}$时刻的标称导航状态$\hat{\boldsymbol{x}}_{a1}$，得到更新后的导航状态$\hat{\boldsymbol{x}}_{a1}^{(1)}$，然后将误差$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}$置零。

对观测信息z_2，由于其等待区间存在z_1观测引起的更新，若在$[t_{s2}\quad t_{a2}]$延时区间内仍采用单一状态转移矩阵，将忽略该中间更新引起的系统误差状态传播不连续问题。因此，按照z_1观测的更新时刻t_{a1}，将z_2观测的延时更新分为两个阶段处理：第一阶段在t_{a1}时刻对z_2进行延时更新，第二阶段将更新后的系统误差和协方差传播至t_{a2}时刻。

由于z_2是在t_{a1}时刻z_1更新后的系统状态和协方差基础上进行观测更新，因此在进行z_2的两阶段更新之前，需要将置零之前的系统误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}$反馈到保存的$t_{s2}$时刻的标称导航状态。反馈过程如下：

$$\delta\boldsymbol{x}_{s2}^{(1)}=\boldsymbol{\Phi}_{a1/s2}^{-1}\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}\ ,\ \hat{\boldsymbol{x}}_{s2}^{(1)}=\hat{\boldsymbol{x}}_{s2}^{(0)}\oplus\delta\boldsymbol{x}_{s2}^{(1)}\tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_{a1/s2}$为$t_{s2}$到$t_{a1}$时刻的系统状态转移矩阵；$\delta\boldsymbol{x}_{s2}^{(1)}$是由$z_1$观测估计得到的$t_{s2}$时刻等效系统误差状态，$\hat{\boldsymbol{x}}_{s2}^{(0)}$和$\hat{\boldsymbol{x}}_{s2}^{(1)}$分别是修正前后$t_{s2}$时刻的标称导航状态；根据误差状态定义，将系统误差状态通过广义加法（$\oplus$）反馈到标称导航状态。接着开始对z_2观测进行两阶段延时更新。

第一阶段：在t_{a1}时刻进行延时观测更新。利用修正后的t_{s2}时刻标称导航状态和z_2观测信息，构建t_{s2}时刻系统误差状态观测方程：

$$\delta z_2=\boldsymbol{h}_2(\hat{\boldsymbol{x}}_{s2}^{(1)})-\tilde{z}_2\approx\boldsymbol{H}_2\delta\boldsymbol{x}_{s2}+\boldsymbol{n}_2\tag{14}$$

其中，δz_2为观测新息；$\tilde{z}_2$和$\boldsymbol{h}_2(\cdot)$为观测信息z_2的测量值和观测方程；$\boldsymbol{H}_2$为利用$\tilde{z}_2$和t_{s2}时刻的标称导航状态$\hat{\boldsymbol{x}}_{s2}^{(1)}$得到的观测矩阵；$\boldsymbol{n}_2$为观测噪声。

然后，利用t_{s2}与t_{a1}时刻之间的状态转移矩阵构建系统误差状态关系，并得到对t_{a1}时刻的等效观测模型：

$$\delta z_2=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}_{a1/s2}^{-1}\delta\boldsymbol{x}_{a1}+\boldsymbol{n}_2\tag{15}$$

接着，以z_1更新后的系统协方差$\boldsymbol{P}_{a1}^{(1)}$作为先验协方差，再次计算$t_{a1}$时刻的系统误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(2)}$，并更新系统协方差$\boldsymbol{P}_{a1}^{(2)}$：

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(2)}=\boldsymbol{K}_2\delta z_2\\ \boldsymbol{P}_{a1}^{(2)}=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{H}_{2,d}\right)\boldsymbol{P}_{a1}^{(1)}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{H}_{2,d}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{K}_2^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{H}_{2,d}=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}_{a1/s2}^{-1}$为$z_2$在$t_{a1}$时刻的等效观测矩阵；$z_2$更新前先验误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(1)}$为 0，因此从式(16)中略去此项。将$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(2)}$反馈至$t_{a1}$时刻的标称导航状态$\hat{\boldsymbol{x}}_{a1}^{(1)}$，得到更新后的导航状态$\hat{\boldsymbol{x}}_{a1}^{(2)}$。

第二阶段：系统状态和协方差传播至当前历元。将利用观测z_2估计得到的系统误差状态$\delta\boldsymbol{x}_{a1}^{(2)}$反馈到$t_{a2}$时刻，并更新当前时刻标称导航状态$\hat{\boldsymbol{x}}_{a2}^{(1)}$；同时将更新后的协方差$\boldsymbol{P}_{a1}^{(2)}$传播至$t_{a2}$时刻，作为当前时刻系统协方差。

系统误差状态传播依赖 t_{a1} 和 t_{a2} 时刻之间的状态转移矩阵，传播和反馈过程表示如下：

$$\delta \boldsymbol{x}_{a2}^{(2)} = \boldsymbol{\Phi}_{a2/a1}\delta \boldsymbol{x}_{a1}^{(2)}\ ,\ \hat{\boldsymbol{x}}_{a2}^{(2)} = \hat{\boldsymbol{x}}_{a2}^{(1)} \oplus \delta \boldsymbol{x}_{a2}^{(2)} \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_{a2/a1}$ 为 t_{a1} 至 t_{a2} 时段的状态转移矩阵。

系统协方差传播过程如下：

$$\boldsymbol{P}_{a2}^{(2)} = \boldsymbol{\Phi}_{a2/a1}\boldsymbol{P}_{a1}^{(2)}\boldsymbol{\Phi}_{a2/a1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{a1\to a2} \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_{a1\to a2}$ 为该区间的过程噪声协方差，可由 IMU 噪声参数和状态转移矩阵计算得到。

上述推导过程表明，对重叠延时观测直接套用单一延时观测更新方法，会忽略延时区间内中间更新引起的误差状态与协方差变化，使所用的状态转换关系与实际滤波过程不一致；只有显式地考虑该中间更新，才能保证延时观测更新的正确性。

2.2 多个重叠延时观测的更新

当两个以上延时观测相互重叠时，中间更新可能频繁打断其他观测的传播过程。将 2.1 节的两个重叠延时观测策略推广至多个重叠延时观测，虽然理论可行，但需分情形进行传播区间切割和历史标称状态修改，逻辑复杂，在实时多传感器系统中尤为难以实现。

为了简化多个重叠延时观测的处理过程，本文提出一种基于分段窗口的延时更新策略。如图 2 所示：根据延时观测的采样与到达时刻设置分段窗口，将采样和到达时刻接近的延时观测归入同一个分段窗口，缓存该窗口内各观测信息采样时刻的标称导航状态，并在窗口末端统一进行延时观测更新。窗口长度的选取应保证窗口内各观测的到达时刻均不晚于窗口末端。由于窗口内各观测信息对应的系统误差传播过程均没有中断，因此能够避免上述多重叠观测中复杂的传播区间分阶段处理逻辑。

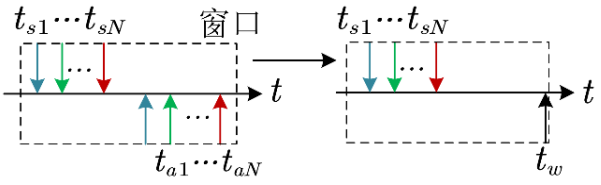


图 2 多个重叠延时观测的处理策略

Fig.2 Processing strategy for multiple overlapping delayed measurements

设窗口内共有 N 个延时观测，其中延时观测 $\boldsymbol{z}_i$ 对应的采样时刻为 t_{si}，窗口末端对应的时刻记为 t_w。对于每个延时观测，首先利用其采样时刻 t_{si} 的标称导航状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_{si}$ 和观测信息，构建对其采样时刻系统误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_{si}$ 的观测模型：

$$\delta \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{h}_i\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{si}\right) - \tilde{\boldsymbol{z}}_i \approx \boldsymbol{H}_i\delta \boldsymbol{x}_{si} + \boldsymbol{n}_i\ ,\ i = 1,2,\cdots,N \tag{19}$$

其中，$\delta \boldsymbol{z}_i$ 为观测新息；$\tilde{\boldsymbol{z}}_i$ 和 $\boldsymbol{h}_i(\cdot)$ 为观测信息 $\boldsymbol{z}_i$ 的测量值和观测方程；$\boldsymbol{H}_i$ 为 $\boldsymbol{z}_i$ 在 t_{si} 时刻的观测矩阵；$\boldsymbol{n}_i$ 为对应的观测噪声，其噪声协方差为 $\boldsymbol{R}_i$。

利用缓存的状态转移矩阵，建立窗口末端时刻 t_w 与观测采样时刻 t_{si} 的系统误差状态之间的关联：

$$\delta \boldsymbol{x}_{si} = \boldsymbol{\Phi}_{w/si}^{-1}\delta \boldsymbol{x}_w \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_{w/si}$ 为 t_{si} 至 t_w 的状态转移矩阵，$\delta \boldsymbol{x}_w$ 为窗口末端时刻 t_w 的系统误差状态。

将式(20)代入式(19)，得到 $\boldsymbol{z}_i$ 对窗口末端时刻 t_w 系统状态的等效观测模型：

$$\delta \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Phi}_{w/si}^{-1}\delta \boldsymbol{x}_w + \boldsymbol{n}_i \tag{21}$$

观测信息 $\boldsymbol{z}_i$ 的等效观测矩阵为：

$$\boldsymbol{H}_{i,d} = \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Phi}_{w/si}^{-1} \tag{22}$$

接着将窗口内 N 个延时观测模型堆叠为统一的联合观测模型，对应的观测信息 $\delta \boldsymbol{z}_w$、观测矩阵 $\boldsymbol{H}_w$ 和观测噪声协方差 $\boldsymbol{R}_w$ 分别为：

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{z}_w = \left[\delta \boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \delta \boldsymbol{z}_N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{H}_w = \left[\boldsymbol{H}_{1,d}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{H}_{N,d}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{R}_w = \mathrm{diag}\left(\boldsymbol{R}_1 \cdots \boldsymbol{R}_N\right) \end{cases} \tag{23}$$

最后以 t_w 时刻的协方差 $\boldsymbol{P}_w^{(0)}$ 为先验协方差，基于联合观测模型执行一次标准卡尔曼更新，即可得到估计的系统误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_w^{(N)}$ 和更新后的系统协方差 $\boldsymbol{P}_w^{(N)}$：

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{x}_w^{(N)} = \boldsymbol{K}_w\delta \boldsymbol{z}_w \\ \boldsymbol{P}_w^{(N)} = \left(\boldsymbol{\mathrm{I}} - \boldsymbol{K}_w\boldsymbol{H}_w\right)\boldsymbol{P}_w^{(0)}\left(\boldsymbol{\mathrm{I}} - \boldsymbol{K}_w\boldsymbol{H}_w\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_w\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{K}_w^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{24}$$

其中，上标(N)表示 N 个观测联合更新后的状态；$\boldsymbol{K}_w$ 为卡尔曼增益；更新前先验误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_w^{(0)}$ 为 0，因此式(24)中略去此项。

将得到的系统误差状态 $\delta \boldsymbol{x}_w^{(N)}$ 反馈至当前时刻的标称导航状态并将其置零，从而完成联合观测更新。

本小节提出的基于分段窗口的多重叠延时观测处理策略虽然将窗口内的观测信息延时到窗口末端使用，使观测修正的执行最多滞后一个窗口长度，但能够有效避免多重叠观测更新引起的系统状态传播频繁中断，在实时多传感器融合系统中具有良好的工程可实现性。

3 实验与结果分析

3.1 实验设置

为验证本文提出的重叠延时观测更新方法，采用开源车载 GNSS/INS 数据集（网址：https://github.com/i2Nav-WHU/awesome-gins-datasets）中约 30 min 的测试数据开展实验，实验轨迹如图 3 中红色线段所示。实验使用消费级 MEMS IMU ICM20602 的实测数据，并设置 GNSS 位置、载体速

度和载体航向三类观测。GNSS 位置观测采用数据集提供的实时动态差分（Real-Time Kinematic, RTK）定位结果，并叠加 0.1 m 的随机噪声；载体速度和载体航向观测分别由参考速度和参考航向叠加模拟噪声生成，噪声标准差分别为 0.05 m/s 和 0.5°。上述速度和航向观测均为模拟辅助观测，并非独立传感器的实测输出。



图 3　车载测试轨迹

Fig.3　Vehicle test trajectory

令 m 表示整秒历元，GNSS 位置、载体速度和载体航向观测的采样时刻 t_{sp}、t_{sv} 和 t_{sh} 分别为 m、(m+0.1) s 和(m+0.2) s。为构造具有随机到达次序的短时重叠延时场景，参考实际系统中可能存在的百毫秒级处理与传输延时，在位置、速度和航向观测的 0.2 s、0.2 s 和 0.1 s 基准延时上，分别叠加服从(−0.05,0.05) s 均匀分布的随机扰动[15]。因此，位置和速度观测的延时范围为 0.15~0.25 s，航向观测的延时范围为 0.05~0.15 s；对应的到达时刻 t_{ap}、t_{av} 和 t_{ah} 分别位于(m+0.15~0.25) s、(m+0.25~0.35) s 和(m+0.25~0.35) s。由此构造出三类观测的采样时刻与到达时刻相互交错的重叠延时场景，其时序关系见图 4。

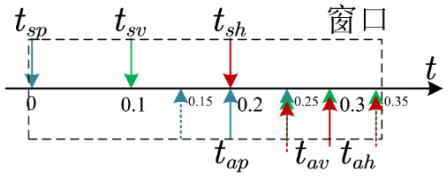


图 4　三个重叠延时观测的时间关系（虚线箭头表示观测到来时刻的范围）

Fig.4　Temporal relationship among three overlapping delayed measurements (dashed arrows indicate the range of measurement arrival epochs)

以开源 GNSS/INS 组合导航软件 KF-GINS[14]为基础，增加载体速度和载体航向观测，并实现本文提出的针对两个重叠延时观测的两阶段更新方法和针对多个重叠延时观测的分段窗口联合更新方法，其中分段窗口长度设为 0.35 s。实验设置以下五种处理方法：

1）NoDelay：不注入软件延时的基准方法；

2）DirectUpdate：不进行延时补偿，将延时观测直接用于更新当前系统状态；

3）NaiveDelay：采用基于状态转移矩阵的传统单延时观测更新方法，但不考虑延时区间内发生的其他观测更新；

4）TwoStep：本文提出的针对两个重叠延时观测的两阶段更新方法；

5）Window：本文提出的针对多个重叠延时观测的分段窗口联合更新方法。

为评估上述五种方法，设计了综合定位精度测试和观测中断测试。综合定位精度测试中，所用观测均以 1 Hz 连续提供；观测中断测试在运动开始一段时间后，每隔 180 s 将当前组合中的全部外部观测中断 60 s。综合定位精度测试以水平位置误差、高程误差和航向误差为评价项，并采用误差均方根（Root Mean Square, RMS）作为评价指标；观测中断测试主要结合误差曲线，定性比较不同方法在观测恢复阶段的性能。

3.2　结果分析

首先开展综合定位精度测试。采用“位置+速度”观测组合评估 TwoStep 方法处理两个重叠延时观测时的导航性能，采用“位置+速度+航向”观测组合评估 Window 方法处理多个重叠延时观测时的导航性能。表 1 统计了各适用方法在“位置”“位置+速度”和“位置+速度+航向”三种观测组合下的水平位置、高程和航向误差 RMS。TwoStep 方法不适用于“位置+速度+航向”组合；仅采用位置观测时，不存在观测延时区间相互重叠的问题，TwoStep 方法退化为传统单延时观测更新方法，因此其结果与 NaiveDelay 方法一致。对比三种观测组合可以看出，除 DirectUpdate 外，其余方法在加入速度和航向观测后，导航误差总体有所减小。DirectUpdate 方法未考虑观测延时，直接使用采样时刻的观测更新当前状态，导致水平位置误差和航向误差明显增大。由于车载平台在高程方向的动态变化较小，观测延时对高程误差的影响相对不明显。TwoStep 和 Window 方法的定位误差总体接近 NoDelay 基准，表明两种方法能够有效处理重叠延时观测。与此同时，NaiveDelay 方法在连续观测条件下也获得了接近 NoDelay 的定位精度，部分指标甚至略优于 TwoStep 和 Window 方法。这是因为在连续 1 Hz 观测更新条件下，系统误差状态和单次观测修正量均较小，忽略延时区间内其他观测更新所产生的影响尚不明显。此外，所提方法在历史观测映射过程中采用的近似也可能影响个别指标，因此各延时处理方法在连续观测条件下的差异较小。

表 1 不同处理模式和观测组合的定位误差统计

Tab.1 Positioning error statistics for different processing modes and measurement combinations

方法	位置			位置+速度			位置+速度+航向		
	水平/m	高程/m	航向/(°)	水平/m	高程/m	航向/(°)	水平/m	高程/m	航向/(°)
NoDelay	0.148	0.142	0.366	0.133	0.119	0.337	0.133	0.119	0.031
DirectUpdate	1.801	0.140	0.817	1.786	0.119	0.729	1.789	0.119	0.362
NaiveDelay	0.161	0.151	0.365	0.138	0.120	0.345	0.137	0.120	0.030
TwoStep	0.161	0.151	0.365	0.143	0.126	0.335	–	–	–
Window	0.170	0.158	0.366	0.149	0.132	0.336	0.149	0.132	0.030

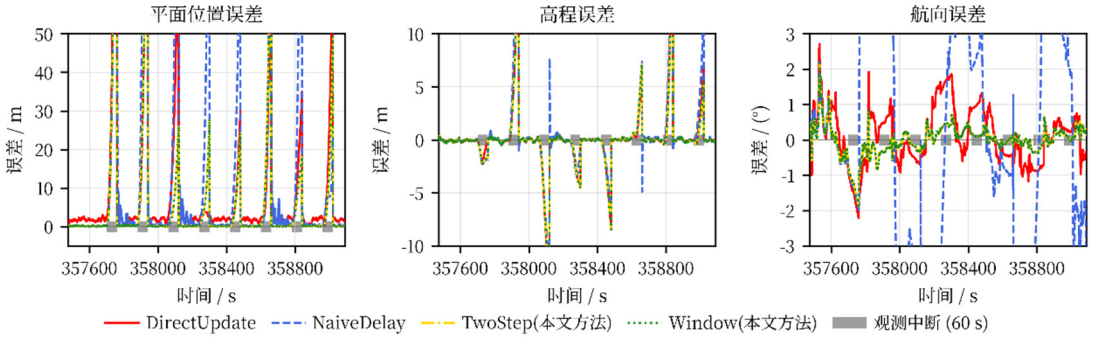


图 5 “位置+速度”组合下不同延时处理方法的导航误差

Fig.5 Navigation errors of different delay processing methods under the position and velocity measurement combination

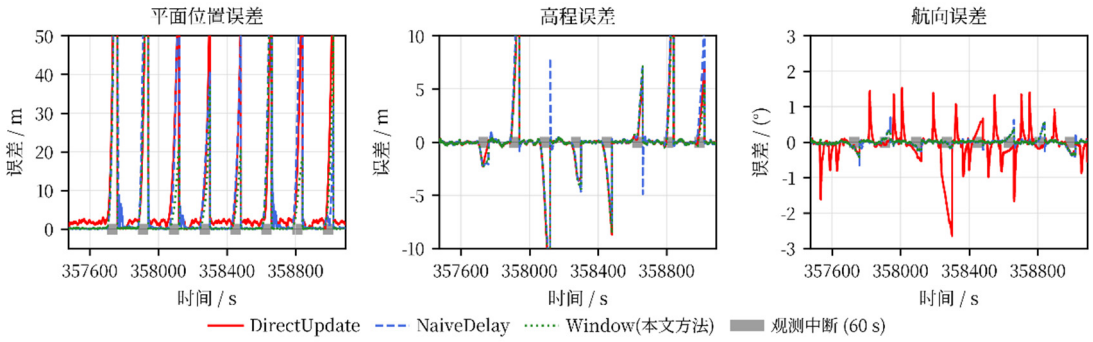


图 6 “位置+速度+航向”组合下不同延时处理方法的导航误差

Fig.6 Navigation errors of different delay processing methods under the position, velocity, and heading measurement combination

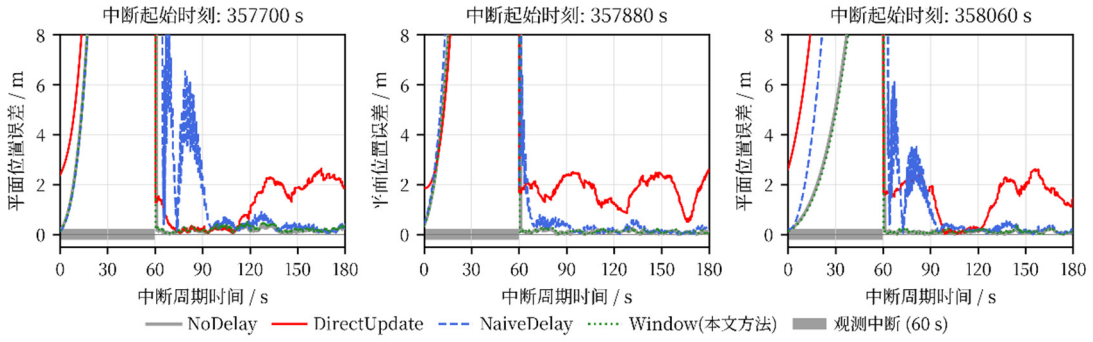


图 7 外部观测恢复后的水平位置误差局部对比

Fig.7 Local comparison of horizontal position errors after external measurement recovery

接着开展观测中断测试。在“位置+速度”组合下，对比 DirectUpdate、NaiveDelay、TwoStep 和 Window 方法；在“位置+速度+航向”组合下，只对比 DirectUpdate、NaiveDelay 和 Window 方法。两种观测组合下各方法的水平位置、高程和航向误差如图 5 和图 6 所示。外部观测未中断时，各延时更新方法的水平位置和航向误差总体明显小于 DirectUpdate 方法。然而，在外部观测恢复后，NaiveDelay 方法表现出较大的误差波动。为进一步比较 NaiveDelay 和 Window 方法的水平位置误差，图 7 分别展示了“位置+速度+

航向”组合下三个中断周期恢复阶段的局部放大结果。局部结果表明，外部观测恢复后，NaiveDelay 方法出现较大的瞬态定位误差，且需要较长时间才能重新收敛。经历较长时间的观测中断后，系统误差状态及恢复观测引起的修正量均明显增大。此时，若仍忽略延时区间内发生的其他观测更新，所采用的状态传播关系将与实际滤波更新过程不一致，从而引起定位误差增大。相比之下，Window 方法的定位误差能够较快恢复至连续观测阶段的误差水平，且未出现反复增大的现象。这说明在观测恢复阶段有必要考虑延时区间内发生的其他观测更新，并验证了 Window 方法在该场景下的有效性。

进一步比较表 1 中 TwoStep 和 Window 方法在“位置”和“位置+速度”组合下的结果可以看出，TwoStep 方法的水平位置精度略优于 Window 方法，但二者均略低于 NoDelay 基准。本文的整体状态转移矩阵由各 IMU 历元对应的短时状态转移矩阵连乘得到，误差状态映射采用局部线性化和单步一阶离散化。因此，随着映射时间跨度增大，相关近似误差的影响可能累积。Window 方法在窗口结束时刻统一进行更新，而 TwoStep 方法分别在位置和速度观测到达后进行更新，其状态映射区间相对较短，因此定位结果更接近 NoDelay 基准。尽管如此，Window 方法的定位精度仍与 NoDelay 较为接近，且更易于扩展和工程实现，因而适用于包含多类重叠延时观测的系统。

总体而言，在本文构造的 0.05~0.25 s 受控短延时场景下，TwoStep 和 Window 方法均能够有效处理重叠延时观测，并在综合定位精度测试中获得接近 NoDelay 基准的导航精度。对于“位置+速度”两个重叠延时观测，TwoStep 方法的水平位置、高程和航向 RMS 分别为 0.143 m、0.126 m 和 0.335°，接近 NoDelay 方法的 0.133 m、0.119 m 和 0.337°；对于“位置+速度+航向”的三个重叠延时观测，Window 方法的对应 RMS 分别为 0.149 m、0.132 m 和 0.030°，接近 NoDelay 方法的 0.133 m、0.119 m 和 0.031°。在观测中断测试中，考虑延时区间内其他观测更新的 TwoStep 和 Window 方法能够减小观测恢复阶段的误差波动，其表现优于 NaiveDelay 方法。对于仅包含两个重叠延时观测的系统，TwoStep 方法具有略高的定位精度；对于包含多类重叠延时观测的系统，Window 方法更易于扩展和工程实现。

4 结 论

本文针对实时 GNSS/INS 滤波系统中多个重叠延时观测的更新问题展开研究。为处理具有不同采样时刻和到达时刻的异步观测所引起的时间不一致，提出了针对两个重叠延时观测的两阶段更新方法，以及面向多个重叠延时观测的分段窗口联合更新方法。针对两个重叠延时观测，首先使用现有延时观测更新方法处理先到达的观测，随后采用两阶段更新策略处理后到达的观测。其中，第一阶段在先到达观测的更新时刻进行延时更新，第二阶段将更新后的系统状态和协方差重新传播至当前时刻，并完成状态反馈。针对更复杂的多个重叠延时观测场景，进一步提出基于分段窗口的联合更新策略，将窗口内到达的观测统一在窗口末端进行延时更新，从而避免中间反馈冲突，并降低工程实现复杂度。基于车载测试数据，利用人为添加随机延时的位置、速度和航向观测对所提方法进行了测试。结果表明，在 0.05～0.25 s 随机短延时条件下，TwoStep 方法处理两个重叠延时观测时的水平位置和高程 RMS 相比 NoDelay 基准分别仅增加约 0.010 m 和 0.007 m，航向精度基本一致；Window 方法处理三个重叠延时观测时的水平位置和高程 RMS 分别仅增加约 0.016 m 和 0.013 m，航向 RMS 与 NoDelay 基准基本一致。所提两种方法均能够有效处理重叠延时观测更新问题，并获得接近无延时基准方法的导航精度；观测中断测试进一步表明，考虑延时期间发生的其他观测更新是必要的，所提方法能够减小观测恢复阶段的误差波动。

参考文献（References）：

[1] 牛小骥，陈起金，张全. 惯性导航原理与算法设计[M]. 第 1 版，武汉：武汉大学出版社，2025.
Niu X, Chen Q, Zhang Q. Principles of inertial navigation and algorithm design[M]. 1st ed, Wuhan: Wuhan University Press, 2025.

[2] 王献中，杨哲华，陈孔哲，等. 一种顾及杆臂误差的 GNSS/INS 倾斜测量方法[J]. 中国惯性技术学报, 2025, 33(3): 219-228.
Wang X, Yang Z, Chen K, et al. A GNSS/INS tilt measurement method considering lever arm error[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2025, 33(3): 219-228.

[3] Shi C, Xiong Z, Chen M, et al. Cooperative navigation of unmanned aerial vehicle formation with delayed measurement[J]. Measurement Science and Technology, 2024, 35(6): 066302.

[4] 梁晓虎，潘树国，蔚保国，等. 基于因子图优化的多模态伪卫星/视觉/惯性融合定位方法[J]. 中国惯性技术学报，2025, 33(12): 1190-1198.
Liang X, Pan S, Yu B, et al. Multi-modal pseudolite/visual/inertial fusion localization method based on factor graph optimization[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2025, 33(12): 1190-1198.

[5] Solomon P D, Wang J, Rizos C. Latency determination and compensation in real-time GNSS/INS integrated navigation systems[C]//The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. Switzerland, 2012, 38: 303-307.

[6] Nanda S K, Kumar G, Bhatia V, et al. Kalman filtering with delayed measurements in non-Gaussian environments[J]. IEEE Access, 2021, 9: 123231-123244.

[7] Yang C K, Shim D S. Analysis of the effect of time delay on the integrated GNSS/INS navigation systems[J]. TransNav, 2013, 7(2): 199-204.

[8] 章红平，常乐，汪宏晨，等. GNSS/INS 紧组合算法实时性改进与嵌入式验证[J]. 东南大学学报（自然科学版），2016, 46(4): 695-701.
Zhang H, Chang L, Wang H, et al. Improvement and verification of real-time performance of GNSS/INS tightly coupled integration in embedded platform[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2016, 46(4): 695-701.

[9] Goh S T, Tissera M S C, Tan R D, et al. Simplex back propagation estimation method for out-of-sequence attitude sensor measurements[J]. Sensors, 2022, 22(20): 7970.

[10] Wang L, Tang H, Zhang T, et al. PO-KF: A pose-only representation-based Kalman filter for visual inertial odometry[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2025, 12(10): 14856-14875.

[11] Niu X, Tang H, Zhang T, et al. IC-GVINS: A robust, real-time, INS-centric GNSS-visual-inertial navigation system[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2023, 8(1): 216-223.

[12] Wang L, Niu X, Zhang T, et al. Accuracy and robustness of ODO/NHC measurement models for wheeled robot positioning[J]. Measurement, 2022, 201: 111720.

[13] 赵辉，苏中，刘宁，等. 基于双轴地磁航向误差自旋修正的行人自主定位方法[J]. 中国惯性技术学报，2023, 31(6): 585-592+636.
Zhao H, Su Z, Liu N, et al. Pedestrian autonomous positioning method based on biaxial geomagnetic azimuth error rotation correction[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2023, 31(6): 585-592+636.

[14] Niu X, Wang L, Chen Q, et al. KF-GINS: An open-sourced software for GNSS/INS integrated navigation[J]. GPS Solutions, 2025, 29(4): 202.

[15] 潘新宇，赵英策，李建勋. GNSS/INS 组合导航的随机时延卡尔曼滤波[J]. 指挥控制与仿真，2022, 44(1): 26-31.
Pan X, Zhao Y, Li J. Random delay Kalman filtering of GNSS/INS integrated navigation[J]. Command Control & Simulation, 2022, 44(1): 26-31.

（上接第 1023 页）

[7] 李魁，李启航，梁文伟，等. 一种旋转式惯导双轴同时连续旋转策略[J]. 中国惯性技术学报，2024, 32(12): 1167-1175.
Li K, Li Q, Liang W, et al. A simultaneous continuous dual-axis rotation strategy for rotational inertial navigation systems[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2024, 32(12): 1167-1175.

[8] Liu C, Li D, Li H, et al. A group affine-based inverse alignment method for high-precision rotational inertial navigation systems[J]. Sensors, 2025, 25(6): 1767.

[9] Wang Y, Xu J, Yang B. A new polar rapid transfer alignment method based on grid frame for shipborne SINS[J]. IEEE Sensors Journal, 2022, 22(16): 16150-16163.

[10] 刘潺，吴文启，冯国虎，等. 法向量位置模型下旋转调制惯导极区综合校正算法[J]. 中国惯性技术学报，2023, 31(2): 107-113.
Liu C, Wu W, Feng G, et al. Integrated polar correction algorithm for rotation-modulated inertial navigation under normal vector position model[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2023, 31(2): 107-113.

[11] Cheng J, Li G, Zhai S, et al. A high-precision polar flight guidance algorithm for fixed-wing UAVs via heading prediction[J]. Drones, 2025, 9(11): 738.

[12] Huang L, Ning X, Xu X, et al. Single-axis rotation modulation transverse SINS based on virtual sphere model in polar region[J]. IEEE Sensors Journal, 2022, 22(13): 13442-13450.

[13] Tian M, Liang Z, Liao Z, et al. A polar robust Kalman filter algorithm for DVL-aided SINSs based on the ellipsoidal earth model[J]. Sensors, 2022, 22(20): 7879.

[14] 夏昕，江文杰，杨浩，等. 基于 Allan 方差斜率的半球谐振陀螺电路噪声辨识[J]. 中国惯性技术学报，2025, 33(6): 615-621.
Xia X, Jiang W, Yang H, et al. Noise identification of hemispherical resonant gyroscope circuit based on Allan variance slope[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2025, 33(6): 615-621.

[15] Lethander K A, Taylor C N. Conservative estimation of inertial sensor errors using Allan variance data[J]. NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation, 2023, 70(3): navi.563.